ACTIVIDADES página 9

a) *El cifrado de César*: empleado por Julio César para comunicarse con los legados de sus legiones. ¿En qué consiste? Codifica la célebre frase de César: «*Alea jacta est*».

Julio César cifraba su correspondencia mediante un algoritmo de sustitución de este tipo: cada letra del mensaje original era sustituida por la que seguía tres posiciones más adelante en el alfabeto: la letra A era sustituida por D, la B por E, la C por F, y así hasta la última letra.

El algoritmo de sustitución puede verse en la tabla. En la primera fila puede verse el **alfabeto original** y en la segunda fila el **alfabeto cifrado**.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

La frase **«*Alea jacta est*»** codificada se convierte en **DÑHD MDFWD HVW**.

b) *El atbash hebreo*: usado en el libro de Jeremías de la Biblia. Busca información sobre él y codifica el mensaje «*examen el día catorce*».

El cifrado se realizaba con las letras del alfabeto hebreo. Nosotros los vamos a realizar con las letras del alfabeto latino.

Se trata de otro algoritmo de sustitución que aparece en la tabla siguiente. Como en el cifrado de César, en la primera fila puede verse el **alfabeto original** y en la segunda fila el **alfabeto cifrado**.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N	M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A

El mensaje **«*examen el día catorce*»** codificado es **VCZNVM VO WRZ XZGLIXV**.

c) El cifrado de Polibio: ideado por el historiador griego Polibio, fue utilizado durante mucho tiempo. Encuentra su forma de proceder y codifica la frase «*Queremos fin guerra*».

Polibio colocó las letras del alfabeto en una tabla 5 *x* 5. El sistema de cifrado consistía en hacer corresponder a cada letra del alfabeto un par de letras que indicaban la fila y la columna, en la cual aquella se encontraba.

La frase **«*Queremos fin guerra*»** se codifica en la expresión:

"DADEAEDBAECBCDDC BABDCC BBDEAEDBDBAA".

	A	***B***	***C***	**D**	**E**
A	A	B	C	D	E
B	F	G	H	I, J	K
C	L	M	N, Ñ	O	P
D	Q	R	S	T	U
E	V	W	X	Y	Z

En este caso la frase «***Queremos fin guerra***» quedaría codificada con la expresión:

"4145154215323443 212433 224515424211".

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I, J	K
3	L	M	N, Ñ	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

d) *El cifrado Hill*: inventado por el matemático norteamericano Lester Hill en 1929. Utiliza matrices en el cifrado. Los pasos del procedimiento de cifrado están expuestos en las página 54 y 55 de este libro de texto.

Usando el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	—
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Codifica el mensaje «*En el mismo lugar*», utilizando la matriz *A* de cifrado, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El mensaje anterior, según el código numérico se transforma es:

Mensaje	E N _	E L _	M I S	M O _	L U G	A R _
Mensaje con código numérico	27 28 24	27 4 24	11 3 1	11 5 24	4 25 10	17 23 24

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia numérica de la segunda fila de la tabla y se multiplica, tomando los números de tres en tres por la matriz de cifrado:

(*I*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 55 \\ 76 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 \\ 27 \\ 20 \end{pmatrix}$

(IV) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ 53 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 31 \\ 52 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix}$

(V) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 29 \\ 45 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

(VI) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 40 \\ 71 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

Mensaje codificado con código numérico	3 27 20	3 3 24	10 14 5	15 16 25	22 1 17	21 12 15
Mensaje codificado	I E H	I I _	G Ñ O	D W U	Y S A	C T D

El mensaje codificado será: IEHII_GÑODWUYSACTD.

Nota: Si deseamos descodificar el mensaje codificado utilizaremos la matriz inversa de *A*, es decir, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y procedemos como hemos hecho en la codificación.

Ofrecemos bibliográfica donde encontrar información sobre las cuestiones expuestas, además en internet puede localizarse, sin dificultad, trabajos realizados sobre los aspectos reseñados.

GÓMEZ URGELLÉS, JOAN. (2010) *Matemáticos, espías y piratas informáticos (Codificación y criptografía)*. RBA.

GONZÁLES VASCO, Mª ISABEL. (2018) *Las matemáticas de la criptología (Secretos demostrables y demostraciones secretas)*. Los libros de la catarata.

CUESTIONES INICIALES página 10

1. Los electrodomésticos que vende una cadena en una gran ciudad los tiene en cuatro comercios C_1, C_2, C_3 y C_4. Vende tres marcas de televisores TV_1, TV_2 y TV_3. En un momento determinado, el comercio C_1 tiene 20 televisores de la marca TV_1, 18 del tipo TV_2 y 16 del TV_3. El comercio C_2, 22, 16 y 38, respectivamente. De igual forma, el comercio C_3, 30, 40 y 10. Por último, las unidades de C_4 son 15, 25 y 20. Expresa, de forma ordenada, los datos anteriores en una tabla.

En las filas de la tabla se han colocado las marcas de los televisores y en las columnas los comercios, obteniéndosela tabla:

	C_1	C_2	C_3	C_4
TV_1	20	22	30	15
TV_2	18	16	40	25
TV_3	16	38	10	20

2. Encuentra las soluciones de los sistemas siguientes por el método de Gauss, expresándolos en forma matricial:

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 11 \\ 2x - 5y + z = -14 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$

La resolución de los sistemas puede expresarse en la forma siguiente:

a) En la primera matriz realizamos la operación elemental por filas: multiplicamos por 2 la primera fila y por 3 la segunda, restando los productos anteriores y colocando los resultados en la segunda fila ($2F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2$), y obtenemos la segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 19 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 17 & -51 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución: $x = 2$, $y = -3$.

b) En la primera matriz realizamos las operaciones elementales por filas: $2F_1 + F_2 \rightarrow F_2$ y $3F_1 + F_3 \rightarrow F_3$ y obtenemos la segunda matriz. En esta matriz realizamos la operación elemental por filas $9F_2 + F_3 \rightarrow F_3$ y obtenemos la tercera matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 2 & -5 & 1 & -14 \\ 3 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 9 & -11 & 40 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -56 & 112 \end{pmatrix}$$

La tercera matriz proporciona la solución: $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$.

ACTIVIDADES página 12

1. Identifica con la notación a_{ij} los elementos de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Los elementos de la matriz son $a_{11} = 0$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = -2$; $a_{22} = 1$ y $a_{23} = -4$.

ACTIVIDADES página 15

2. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) 3(*A* – *B*) – 6C **b) 2A –3 (*B* + *C*)**

a) 3 (*A* – *B*) – 6 *C* = $3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) 2A –3(*B* + *C*) = $2\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

3. Calcula *x*, *y*, *z* en la expresión: $4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & x \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ y & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & z \end{pmatrix}$.

Operando e igualando las matrices resultantes, obtenemos: *x* = 4, *y* = 3 y *z* = 8.

ACTIVIDADES página 17

4. Calcula $A^2 - 2A - I$ siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallamos A^2: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

Realizamos la operación: $A^2 - 2A - I = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$

5. Sean las matrices $A_{4\,x\,3}$, $B_{4\,x\,2}$ y $C_{2\,x\,3}$. Determina la dimensión de las siguientes matrices:

a) $A^t \cdot B$ b) $A \cdot C^t$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot A^t$ e) $B \cdot C + A$ f) $B^t \cdot A - C$

Las dimensiones de las matrices resultantes de las operaciones son:

a) $A^t \cdot B$: (3 *x* 4) · (4 *x* 2) $\Rightarrow$ **(3 *x* 2)**

b) $A \cdot C^t$: (4 *x* 3) · (3 *x* 2) $\Rightarrow$ **(4 *x* 2)**

c) $B \cdot C$: (4 *x* 2) · (2 *x* 3) $\Rightarrow$ **(4 *x* 3)**

d) $C \cdot A^t$: (2 *x* 3) · (3 *x* 4) $\Rightarrow$ **(2 *x* 4)**

e) $B \cdot C + A$: (4 *x* 2) · (2 *x* 3) + (4 *x* 3) $\Rightarrow$ (4 *x* 3) + (4 *x* 3) $\Rightarrow$ **(4 *x* 3)**

f) $B^t \cdot A - C$: (2 *x* 4) · (4 *x* 3) + (2 *x* 3) $\Rightarrow$ (2 *x* 3)+ (2 *x* 3) $\Rightarrow$ **(2 *x* 3)**

6. Calcula el valor de *x* e y para que las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$ conmuten.

Se cumplirá:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+3x & 2+3y \\ 3+x & 6+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ x+3y & 3x+y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+3x = 7 \\ 2+3y = 5 \\ 3+x = x+3y \\ 6+y = 3x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

7. Halla el valor de *x* en la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{pmatrix}$ para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4I$, siendo *I* la matriz unidad de orden 3.

Operamos en la igualdad $A^2 = 4I$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -2x+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ -2x+4=0 \\ -2+x=0 \end{cases} \Rightarrow \{x = 2$$

ACTIVIDADES página 18

8. Determina las matrices 2 x 2 de la forma $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{x}\\ \mathbf{0} & \mathbf{y}\end{pmatrix}$ tales que $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}^t=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$, siendo M^t la matriz traspuesta de M.

Operando obtenemos:

$$M\cdot M^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1+x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1+x^2=1\\ xy=0\\ y^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\pm 2\end{cases}$$

La matriz *M* puede ser $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ o $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

9. Dadas las matrices $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$, comprueba que:

a) $(A+B)^t=A^t+B^t$

b) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $(A+B)^t=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 12 & 0\end{pmatrix}$ y $(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}8 & 12\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES página 19

10. Para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} \end{pmatrix}$, encuentra las matrices que cumplan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$.

Operamos e igualamos las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 + x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^2 = 2 \\ xy = -2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1,\ x = 1 \\ x \cdot y = -2 \\ y = -2,\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1,\ y = 2 \\ x = 1,\ y = 2 \end{cases}$$

i) Para $x = -1$, $y = 2$ la matriz es $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Para $x = 1$, $y = -2$ la matriz es $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES página 21

11. Utilizando el método de Gauss–Jordan calcula las matrices inversas de:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

● Calculamos la matriz inversa de *A* utilizando las operaciones elementales por filas y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right), \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

En (1) hemos realizado $F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1$. En (2) hemos realizado $F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2$.

La matriz inversa de *A* es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

● Calculamos la matriz inversa de *B* utilizando las operaciones elementales por filas y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En (1) hemos realizado $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$. En (2) hemos realizado $F_3 \rightarrow F_3 + F_2$. En (3) hemos realizado $F_2 \rightarrow F_2 + F_3$. En (4) hemos realizado $F_1 \rightarrow F_1 + F_3$.

La matriz inversa de *B* es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Se consideran las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$,

a) Comprueba que *B* es la matriz inversa de *A*.

b) Calcula la matriz *X* tal que *A* · *X* = *B*.

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz *A* cumple $A \cdot A^{-1} = I$. Veamos qué $A \cdot B = I$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1} = B$.

b) Operamos en la ecuación AX = *B* y despejamos la matriz *X*:

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = B \cdot B = B^2$$

Hallamos la matriz *X*: $X = B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES página 23

13. Dada la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **calcula:**

a) Su rango.

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

a) El rango de la matriz es 3 al ser el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

El mismo resultado podemos obtenerlo con las operaciones elementales por filas:

$$rango\ (A) = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Existe una columna combinación lineal de las otras, por ejemplo, la columna segunda podemos ponerla en combinación lineal de las otras tres:

$$(0, 3, 6) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 3 \cdot (0, 3, 6) + 0 \cdot (1, 4, 4)$$

c) En este caso no existe una fila combinación lineal de las restantes ya que al ser el rango 3 las tres filas son linealmente independientes.

14. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro *m*.

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{m-1} & \mathbf{2m} \\ \mathbf{m+1} & \mathbf{m} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{m} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

a) Haciendo ceros con las operaciones elementales entre filas, obtenemos:

$$rango\ A = rango \begin{pmatrix} m-1 & 2m \\ m+1 & m \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} m-1 & 2m \\ 0 & m \cdot (m+3) \end{pmatrix}$$

Estudio:

● Si $m \neq 0$ y $m \neq 3$, el rango de A es 2.

● Si $m = 0$, el rango de $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es 1.

● Si $m = 3$, el rango de $A=\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es 1.

b) Haciendo ceros con las operaciones elementales entre filas, obtenemos:

$$rango\ B = rango\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 2 & m \\ 9 & 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & m+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudio:

● Si $m \neq -4$, el rango de B es 2.

● Si $m = 4$, el rango de $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 1.

ACTIVIDADES página 29

1. Cuadrados de números. Si un número acaba en 2, ¿cuál es la última cifra de su cuadrado? Y si acabase en otra cifra, ¿cuál es la última cifra de su cuadrado?

Calcula los cuadrados de 15, 25, 35, 45 y 55, ¿cuáles son sus dos últimas cifras? ¿Podrías explicar una regla razonada para calcular las cifras restantes del cuadrado, sin efectuar la multiplicación?

Calcula los cuadrados de 11, 21, 31, 41 y 51. Da una regla que te permita calcularlos a partir de los cuadrados de los números 10, 20, 30, 40 y 50.

a) Si un número acaba en 2, su cuadrado acaba en 4.

En la tabla pueden verse todas las terminaciones:

Si un número acaba en	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Su cuadrado acaba en	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b) Calculamos los cuadrados pedidos y alguno más del mismo tipo:

$15^2 = 225$ $25^2 = 625$ $35^2 = 1225$ $45^2 = 2025$

$55^2 = 3025$ $65^2 = 4225$ $75^2 = 5625$ $85^2 = 7225$

$95^2 = 9025$ $105^2 = 11025$

Observamos que todos acaban en 25 y las otras cifras son el resultado de multiplicar el valor de las decenas por este número más 1.

Para 15^2: $1 \cdot (1 + 1) = 2$; para 25^2: $2 \cdot (2 + 1) = 6$; para 35^2: $3 \cdot (3 + 1) 12$; …

Teniendo en cuenta la expresión polinómica de un número en el sistema de numeración decimal, se obtiene:

$$\mathbf{(a5)^2} = (10a + 5)^2 = (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + 5^2 =$$

$$= 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2 + a) + 25 = \mathbf{a \cdot (a + 1) \cdot 100 + 25}$$

c) Como en el caso anterior calculamos los cuadrados:

$11^2 = 121$ $21^2 = 441$ $31^2 = 961$ $41^2 = 1681$…

Teniendo en cuenta la expresión polinómica:

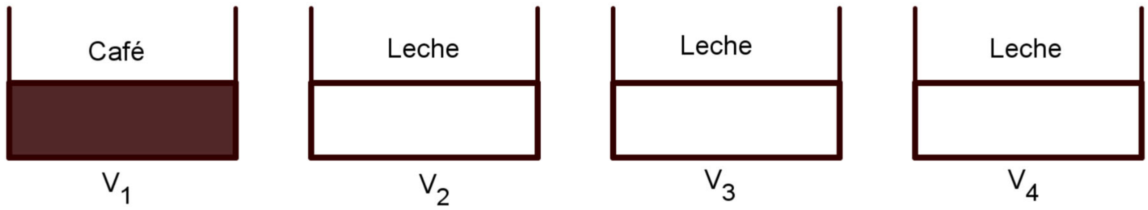
$$\mathbf{(a1)^2} = (10a + 1)^2 = (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot 1 + 1^2 =$$

$$= 100a^2 + 20a + 1 = \mathbf{a^2 \cdot\ 100 + 2a \cdot 10 + 1}$$

La regla sería: **El cuadrado de a por 100, el doble de a por 10, más 1.**

2. Tazones de café con leche. Cuatro tazones contienen el mismo volumen de líquido. El primer tazón contiene café solo y los otros tres sólo contienen leche. Se vierte la cuarta parte del contenido del primer tazón al segundo. Se hace la mezcla homogénea y, a continuación, se vierte la cuarta parte del contenido del segundo tazón al tercero. Se hace la mezcla homogénea y se vierte la cuarta parte del contenido en el último tazón. ¿Qué relación hay entre el volumen del café y de la leche que hay en el cuarto tazón?

Dibujamos los tazones con sus contenidos:



Los volúmenes de los distintos tazones en las distintas acciones aparecen en la tabla.

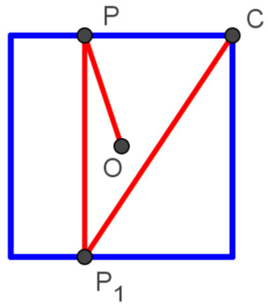
Estado	Tazón de café	Tazón de leche (1)	Tazón de leche (2)	Tazón de leche (3)
Inicio	V_1	V_2	V_3	V_4
Primer trasvase		$V_2 + \frac{1}{4}V_1$	V_3	V_4
Segundo trasvase			$V_3 + \frac{1}{4}\left(V_2 + \frac{1}{4}V_1\right)$	V_4
Tercer trasvase				$V_4 + \frac{1}{4}\left(V_3 + \frac{1}{4}\left(V_2 + \frac{1}{4}V_1\right)\right)$

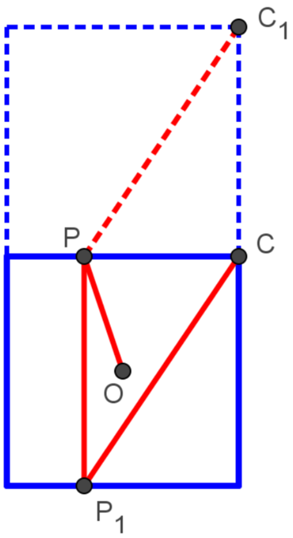
Como $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$, el contenido final del cuarto tazón es:

$$V_F = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}\right)V = \frac{\frac{1}{4^4} - 1}{\frac{1}{4} - 1}V = \frac{1 - 4^4}{4^3 - 4^4}V$$

El contenido final de café del cuarto tazón es $C_F = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}C\right)\right)$; pero, como C = V, resulta que $C_F = \frac{1}{4^3}V$. La relación, r, pedida es, por tanto, $r = \dfrac{\frac{1}{4^3}V}{\frac{1 - 4^4}{4^3 - 4^4}V - \frac{1}{4^3}V} = \frac{1}{84}$.

3. Longitud mínima. Dado un cuadrado ABCD de centro O, determina la posición del punto P para que la longitud $\overline{\mathbf{OP}} + \overline{\mathbf{PP_1}} + \overline{\mathbf{P_1C}}$ sea mínima.





Como el segmento $\overline{PP_1}$ mide la longitud del lado del cuadrado, es constante, entonces la longitud que tiene que ser mínima es $\overline{OP} + \overline{P_1C}$.

Dibujamos en el cuadrado del enunciado un cuadrado auxiliar punteado en la parte superior.

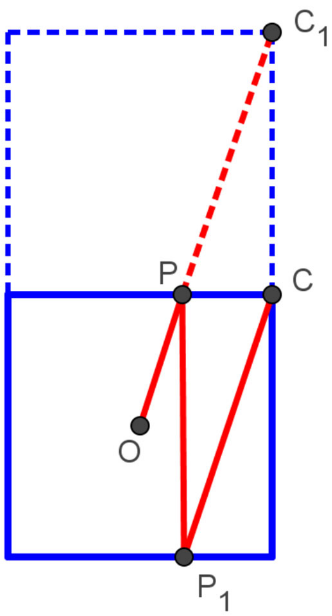
En dicha figura se verifica:

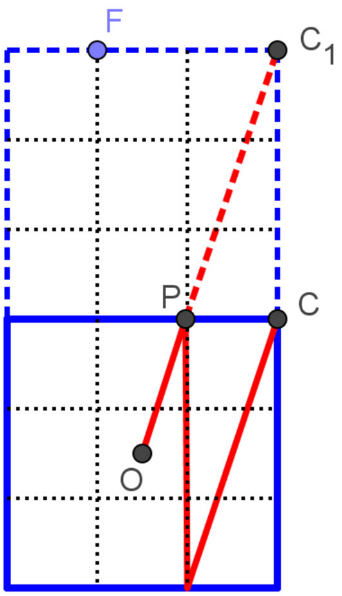
$$\overline{OP} + \overline{P_1C} = \overline{OP} + \overline{PC_1}$$

y esta longitud será mínima cuando los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{PC_1}$ estén alineados.

En la figura inferior se muestra como determinar la posición del punto P buscado.

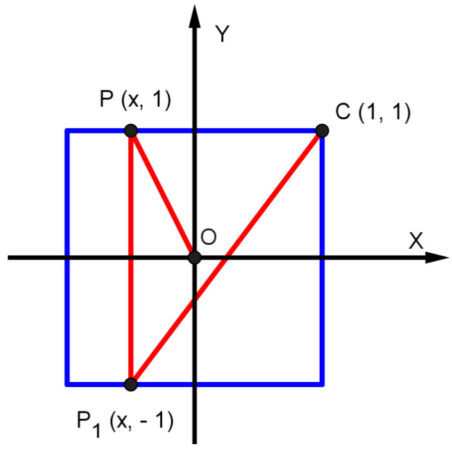
Resulta que el punto P es el origen del segmento $\overline{PC}$, siendo este la tercera parte del lado del cuadrado.





Resolución analítica:

Dibujamos un sistema cartesiano tomando como origen de coordenadas el centro de un cuadrado de lado 2, es decir, el punto O (0, 0).



Las coordenadas de los puntos del enunciado son:

$C\,(1, 1)$, $P\,(x, 1)$ y $P_1\,(x, -1)$

Las longitudes de los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{PP_1}$ y $\overline{P_1C}$ son:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + 1} \qquad \overline{PP_1} = \sqrt{(x-x)^2 + [1-(-1)]^2} = 2$$

$$\overline{P_1C} = \sqrt{(x-1)^2 + [1-(-1)]^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

La función a optimizar es $f\,(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

Los posibles máximos y mínimos son los valores que anulan la primera derivada de *f* (*x*), que es:

$$f\,'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}} \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

Anulamos la primera derivada y obtenemos:

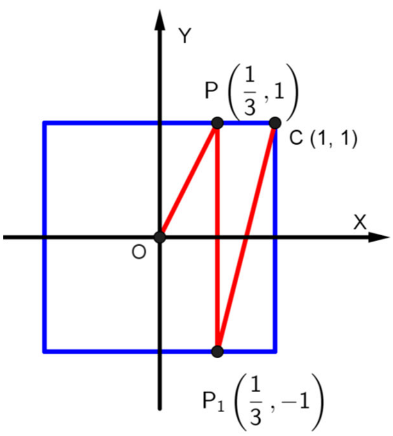
$$f\,'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot\sqrt{x^2-2x+5} + (x-1)\cdot\sqrt{x^2+1} = 0$$

Operamos y resolvemos la ecuación resultante.

$$x\cdot\sqrt{x^2-2x+5} = (1-x)\cdot\sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad x^2\cdot(x^2-2x+5) = (1-x)^2\cdot(x^2+1) \quad \Rightarrow$$

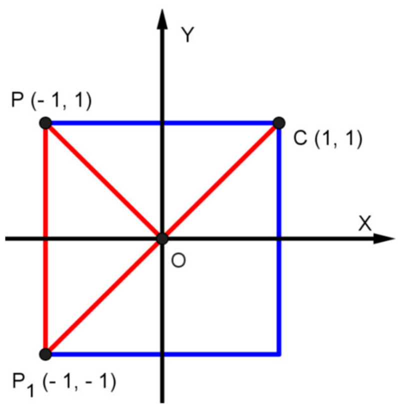
$$\Rightarrow \quad x^4 - 2x^3 + 5x^2 = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



Para $x_1 = \frac{1}{3}$, las coordenadas del punto P son $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y la longitud buscada es mínima (ver primer dibujo).

Para $x_2 = -1$, las coordenadas del punto P_1 son $(-1, -1)$ y la longitud buscada es máxima (ver segundo dibujo).



ACTIVIDADES página 32

1. *A* cuatro compañeros, *A*, *B*, *C*, D, de segundo de bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: "¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes".

Las respuestas son: *A* opina que *B* y D; *B* opina que *A* y el mismo; *C* opina que *A*, *B* y D; D opina que el mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

Expresamos la información del enunciado en una tabla, poniendo un 1 en el caso que un individuo opine de otro que aprobará el curso y un 0 en caso contrario.

	A	***B***	***C***	**D**
A	0	1	0	1
B	1	1	0	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	1

Los valores de la tabla dan lugar a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Escribe dos matrices diagonales de orden 3 tal que la suma de todos sus elementos sea 6.

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros. Matrices que cumplan el enunciado pueden ser:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ o } D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Encuentra todas las matrices de dimensión 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si los elementos de cada fila deben sumar 1 se cumplirá: $\begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-a \\ d=1-c \end{cases}$ y la matriz será de la forma: $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{pmatrix}$.

Si la suma de los elementos de la primera columna deben sumar 0, se cumplirá: a + c = 0, es decir, c = – a. Sustituyendo en la matriz, obtenemos:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$, siendo a un número real cualquiera.

4. Calcula *a, b, c* y *d* para que se cumpla $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3a} \\ \mathbf{d} & \mathbf{7} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{a+b} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{c} \end{pmatrix}=\mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$.

Operamos e igualamos los elementos de las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} a+b-2 & 3a+4 \\ d+5 & c+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b-2=2a \\ 3a+4=2b \\ d+5=2c \\ c+7=2d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: *a* = 0, *b* = 2, *c* = 17/3 y *d* = 19/3.

5. Dadas las matrices: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**; calcula:**

a) *A* + *B* b) *A* – *B* + *C* c) 2A + *B* – 3C d) AB – AC e) 2AB – 3AC + 4BC

Los resultados de las operaciones son:

a) $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A-B+C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $AB - AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $2AB - 3AC + 4\,BC = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 88 \\ -32 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 84 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$

6. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas *X*, Y, *Z*, distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Los miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{46} & \mathbf{80} \\ \mathbf{36} & \mathbf{58} & \mathbf{88} \\ \mathbf{48} & \mathbf{66} & \mathbf{92} \end{pmatrix} \end{array}$$

El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

Las matrices A_i, con i = 1, 2, 3, 4, muestran el volumen de aceite de cada uno de los almacenes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 44 & 92 & 160 \\ 72 & 116 & 176 \\ 96 & 132 & 184 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 40 \\ 18 & 29 & 44 \\ 24 & 33 & 46 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 66 & 138 & 240 \\ 108 & 174 & 264 \\ 144 & 198 & 276 \end{pmatrix}$$

El volumen total de aceite almacenado de cada calidad y de cada una de las marcas es:

$$T = \begin{pmatrix} 143 & 299 & 520 \\ 234 & 377 & 572 \\ 312 & 429 & 598 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{x}\\ \mathbf{x-1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$**; calcula el valor de *x* para que se cumpla *A* + *B* +** $\mathbf{C^2}$ **= 3I, siendo *I* la matriz identidad de orden 2.**

Hallamos C^2: $C^2 = C\cdot C = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

Operamos $A + B + C^2 = 3I$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & x-2\\ x-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$$

8. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3}\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\ \mathbf{y}\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Los productos posibles son:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 16 & 9\\ -8 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 11 & 10\end{pmatrix}$$

$$B\cdot D=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -9 & 3\\ 5 & -13 & 18\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 7 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 9 & 5\\ -4 & 12 & 7\\ -8 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$D\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

9. Obtén las matrices *A* y *B* que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} - \mathbf{2B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{2A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Resolviendo los sistemas por reducción obtenemos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

10. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de dimensión 2x2 cualquiera. En cada caso se cumplirá:

a) $A \cdot X = X \cdot A \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-2b \\ c+d & c-2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c = a+b \\ a-2c = c+d \\ b+d = a-2b \\ b-2d = c-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a-3b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-3b \end{pmatrix} \, con \; a, b \in R.$$

b) $B \cdot X = X \cdot B \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = a \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \, con \; a, c \in R.$$

ACTIVIDADES página 33

11. Para las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:

a) $\left(A^t\right)^t$ **= A**

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

d) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

En cada apartado obtenemos:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ = *A*

b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $(A + B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ 4k & 0 \end{pmatrix}$ y $(k \cdot A)^t = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$$k \cdot A^t = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

12. Para las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

a) $\mathbf{A^t \cdot B}$

b) $\mathbf{C^t \cdot B}$

c) $\mathbf{D^t \cdot D}$

d) $\mathbf{D \cdot D^t}$

Los resultados de los productos son:

a) $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

c) $D \cdot D^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$

d) $D^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

13. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

La descomposición de la matriz *M* es *M* = S + H, siendo S la matriz simétrica, $S = \frac{M + M^t}{2}$ y H la matriz antisimétrica, $H = \frac{M - M^t}{2}$.

En cada caso se obtiene:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

14. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Sea *A* una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

b) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

Las respuestas quedan:

a) Se tiene: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$, por tanto, la matriz $(A + A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.

b) Una matriz *A* es antisimétrica si $A^t = -A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (-A) \cdot (-A) = A^2$, luego A^2 es simétrica.

$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (-A) \cdot A^2 = -A^3$, luego A^3 es antisimétrica.

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

15. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}. En cada uno de los dos casos calculamos las potencias sucesivas de *A* y *B*.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 - (-I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I$

Observamos que las potencias de la matriz *A* se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las potencias sucesivas de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una ley de recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par: $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar: $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

16. Considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcula las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de n $\in$?

a) Operamos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La expresión de la matriz A^n es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Veamos que es cierto por el método de inducción:

- Es cierto para n = 1 ya que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Supongamos que se cumple para n = h, es decir, $A^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, veamos que se cumple para n = h + 1:

$$A^{h+1} = A^h \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h+2 \\ 0 & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(h+1) \\ 0 & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17. En una academia de idiomas hay tres niveles de inglés para obtener los títulos de Cambridge: First, Advanced y Proficiency. Para First hay 7 estudiantes en el grupo de lunes y miércoles (G1), 8 en el grupo de martes y jueves (G2) y 4 en el intensivo de los sábados (G3). En Advanced hay 8 estudiantes en G1, 9 en G2 y 4 en G3. En el nivel de Proficiency hay 7 estudiantes en G1, 5 en G2 y 7 en G3.
Cada estudiante de First paga 110€ mensuales, 115€ los estudiantes de Advanced y 120€ los de Proficiency.
Escribe una matriz E que represente los estudiantes de la academia por niveles de inglés; y otra, P, con los precios mensuales por niveles.
¿Cuánto ganará mensualmente la academia en cada turno horario?

La matriz con los estudiantes de los distintos niveles es $E = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ y la matriz con los precios mensuales por niveles es $P = \begin{pmatrix} 110 \\ 115 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Las ganancias mensuales, en euros, de la academia en cada turno horario son:

$$E \cdot P = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 115 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2530 \\ 2515 \\ 1740 \end{pmatrix}$$

18. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Realizando la operación elemental $3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$ y $F_3 + F_2 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + 4F_1 \rightarrow F_3$ y $3F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

19. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

a) Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumplirá $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 5c = 1 \\ -a + 3c = 0 \\ 2b - 5d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos:

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) No existe C^{-1}

ACTIVIDADES página 34

20. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss–Jordan:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Utilizando el método de Gauss–Jordan obtenemos:

a) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to 2F_1 + F_2$; $F_2 \to 1/3\, F_2$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de *A* es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to F_1 - F_2$; $F_3 \to F_3 - F_2$; $F_2 \to F_2 + F_3$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de *B* es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos que la matriz inversa de *C* es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, encuentra, en cada caso, la matriz *X* que cumple:

a) *X* · *A* + 2*B* = *C* **b) *A* · *X* – *B* = *C*** **c) *A* · *X* · *B* = *C***

a) Despejamos la matriz incógnita *X* y obtenemos: $X = (C - 2B) \cdot A^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz incógnita *X* y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot (B + C)$.

Operando con las matrices tenemos:

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz incógnita *X* y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

22. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes, es decir, con el mismo rango.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$.

c) Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = 2.

23. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2x4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

En ambos casos existen múltiples respuestas.

a) La matriz de dimensión 2x4,

– con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

– con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

– con rango 3 o 4 no es posible construirlas.

a) Un ejemplo podría ser:

– con rango 1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$ – con rango 2: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

– con rango 3: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ – con rango 4: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

24. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a.

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{a+2} & \mathbf{a-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$

Las soluciones son:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+2 & a-2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a+6 \end{pmatrix}$

Si a = – 6 el rango es 1, y si a ≠ – 6 el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$

Si a ≠ 1 y a ≠ – 1 el rango es 3.

Si a = – 1 o a = 1 rango es 2.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$

Si *a* ≠ – 2 y a ≠ 1 el rango es 3.

Si *a* = – 2 el rango es 2.

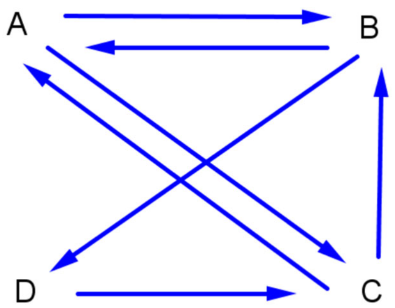
Si *a* = 1 el rango es 1.

25. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz M.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una enfermedad determinada. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

Dibujamos el grafo:



Calculamos M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de segundo orden. Así, por ejemplo:

$a_{11} = 2$ indica que *A* se contagia a sí mismo a través de *B* o *C* al existir los caminos *A–B–A* o *A–C–A*.

$a_{12} = 1$ indica que *A* contagia a *B* a través de un tercero al existir el camino *A–C–B*.

Calculamos M^3:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de tercer orden. Así, por ejemplo:

$a_{12} = 2$ indica que *A* contagia a *B* a través de otros dos individuos al existir los caminos *A–C–A–B* o *A–B–A–B*.

$a_{32} = 2$ indica que *C* contagia a *B* a través de otros dos individuos al existir los caminos *C–A–C–B* o *C–B–A–B*.

26. Tres artesanos, Antón, Alberto y Carlos trabajan para una marca de joyería. Elaboran conjuntos de anillos, pendientes y colgantes Por cada conjunto realizado en oro les pagan 600 €, si es en plata 500 € y si es en acero 400 €. Las matrices N y D muestran sus producciones en los meses de noviembre y diciembre. La matriz P muestra el pago por unidad elaborada.

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Acero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Oro} & \text{Plata} & \text{Acero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{600} \\ \mathbf{500} \\ \mathbf{400} \end{pmatrix}$$

Determina las siguientes matrices y explica qué representan:

a) N · S **b) D · S** **c) N + D** **d) (N + D) · S**

Operamos las matrices y obtenemos:

a) $N \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5300 \\ 5400 \\ 4800 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada uno de los tres artesanos en el mes de noviembre.

b) $D \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 6000 \\ 6200 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada uno de los tres artesanos en el mes de diciembre.

c) $N + D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

La matriz muestra la producción realizada durante los meses de noviembre y diciembre.

d) $(N + D) \cdot S = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ 11400 \\ 11000 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada uno de los tres artesanos en los meses de noviembre y diciembre.

27. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, *A*, *B* y *C*, distribuidos en cursos según la matriz *M*. Una empresa de transporte elabora dos rutas R_1 y R_2. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz N. Si el precio por alumno y kilómetro de 12 euros, expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario.

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{P} & \mathbf{S} & \mathbf{T} & \mathbf{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{212} & \mathbf{190} & \mathbf{125} & \mathbf{98} \\ \mathbf{96} & \mathbf{75} & \mathbf{50} & \mathbf{12} \\ \mathbf{24} & \mathbf{26} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \qquad \mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{24} & \mathbf{46} \\ \mathbf{9} & \mathbf{32} & \mathbf{20} \end{pmatrix} \end{array}$$

Los kilómetros recorridos por cada grupo de alumnos en cada una de las dos rutas, R_1 y R_2, es:

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

La recaudación por curso en cada itinerario es:

$$12 \cdot \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 61248 & 54192 & 33024 & 17280 \\ 65520 & 55560 & 35580 & 17112 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

ACTIVIDADES ACCESO *A* LA UNIVERSIDAD página 35

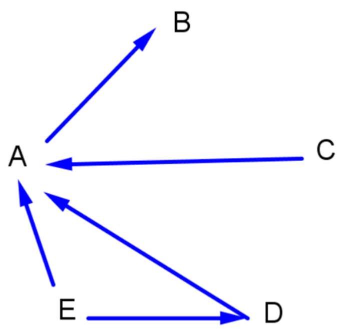
1. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: *A* influye sobre *B*; E sobre D; *C*, D y E influyen sobre *A*. Se pide:

a) Construye la matriz de influencias: *M*.

b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M^2.

c) Interpreta la suma de las filas de *M* y de sus columnas.

Dibujamos el grafo con las relaciones de influencias que se describen en el enunciado.



a) Teniendo en cuenta que los individuos de las filas influyen sobre los individuos de las columnas, como puede verse en el grafo, la matriz de influencias es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b) La matriz de influencias en dos etapas es M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El significado de los elementos que valen 1 es:

- $a_{32} = 1$: *C* influye en *B* a través de *A*.
- $a_{42} = 1$: D influye en *B* a través de *A*.
- $a_{51} = 1$: E influye en *A* través de D.
- $a_{52} = 1$: E influye en *B* a través de *A*.

c) La suma de las filas es 1, 0, 1, 1 y 2, respectivamente.

Estos valores significan:

Fila	Suma de la fila	Significado
Primera	1	*A* influye en una persona, *B*
Segunda	0	*B* no influye en nadie
Tercera	1	*C* influye en una persona *A*
Cuarta	1	D influye en una persona, *A*
Quinta	2	E influye en dos personas, *A* y D

La suma de las columnas es 3, 1, 0, 1, 0, respectivamente.

Estos valores significan:

Columna	Suma de la columna	Significado
Primera	3	*A* está influenciado por 3 personas, *C*, D y E
Segunda	1	*B* está influenciado por una persona, *A*
Tercera	0	*C* no está influenciado
Cuarta	1	D está influenciado por una persona, E
Quinta	0	E honesta influenciado

2. Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{a} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**,**

a) Determina el valor de los parámetros a y b para que se cumpla *A · B = B · A*.

b) Determina el valor de a para el cual se verifica A^2 = 2A.

a) Si $A \cdot B = B \cdot A$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6+ab & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3a \\ 2b+2 & ab \end{pmatrix}$$

Igualando términos:

$$\begin{cases} 6+ab = 6 \\ -a = 3a \\ -6 = 2b+2 \\ 0 = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases}$$

b) Si $A^2 = 2A$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-2a & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando términos:

$$\begin{cases} 4-2a = 4 \\ 2a = 2a \\ -2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \{a = 0$$

3. Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \end{pmatrix}$ **e** $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**. Determina *x* para que se verifique la ecuación**

A^2 – 6A + 5I = O, donde O es la matriz cuyos elementos son nulos.

Operando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 5I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-6x+5 & 0 \\ 0 & x^2-6x+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando términos, obtenemos:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

4. Una investigadora médica estudia la difusión de un virus en una población de 1 000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80 % de que una cobaya infectada venza al virus y un 10 % de que una cobaya no infectada quede infectada. Actualmente, hay 100 cobayas infectadas por el virus. ¿Cuántas estarán infectadas la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectadas?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Infectado & No\ infectado \end{array} \\ \begin{array}{r} Infectado \\ No\ infectado \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

Estarán infectados la próxima semana:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = X_1$$

Estarán infectados dentro de dos semanas:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma: $P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$

Calculamos el valor estacionario: Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}20x + 0{,}10y = x \\ 0{,}80x + 0{,}90y = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}80x + 0{,}10y = 0 \\ 0{,}80x - 0{,}10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 8x$$

Si $x + y = 1000$, entonces: $\begin{cases} x = 111 \\ y = 889 \end{cases}$.

5. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de ciencias. Todos los que estudian Matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian Matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado Matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiaran más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evoluciona el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{c|cc} & +1\ hora & -1\ hora \\ +1\ hora & 0 & 0{,}25 \\ -1\ hora & 1 & 0{,}75 \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los dos estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

La matriz del día siguiente es: $P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = X_1$

La matriz del segundo día es: $P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = X_2$

La matriz del tercer día es: $P \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 161 \end{pmatrix} = X_3$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}25y = x \\ x + 0{,}75x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 0{,}25y = 0 \\ x - 0{,}25y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 4x$$

Si $x + y = 200$, entonces: $\begin{cases} x = 40 \\ y = 160 \end{cases}$.

6. Encuentra las matrices que conmutan con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que conmuta con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Se cumplirá $A \cdot X = X \cdot A$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 4a + 2b \\ 2c & 4c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 4c & 2b + 4d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Igualando términos: $\begin{cases} 2a = 2a + 4c \\ 4a + 2b = 2b + 4d \\ 4c + 2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c = 0 \\ 4a = 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$

Las matrices que conmutan con A tienen la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales cualesquiera.

7. Calcula, razonando el procedimiento, la matriz A^{17}, siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

Realizamos las potencias sucesivas de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $A^{17} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$

8. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías *A*, *B* y *C*, cada una en dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo *A*; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo *B*, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo *C*. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos,

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos–tamaño de estantería.

a) Las matrices son:

$$\begin{array}{cc} & \textit{Tamaños} \\ & \begin{array}{cc} \textit{Grande} & \textit{Pequeño} \end{array} \\ \textit{Modelos}\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Tornillos} & \textit{Soportes} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Grande} \\ \textit{Pequeño} \end{array} & \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matriz que representa la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos–tamaño de estantería es el resultado del producto que sigue:

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 & 8000 & 4000 \\ 8000 & 6000 & 6000 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 112\,000 & 200\,000 & 136\,000 \\ 38\,000 & 72\,000 & 48\,000 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textit{Tornillos} \\ \textit{Soportes} \end{array} \end{array}$$

También se puede multiplicar la primera matriz del apartado a) por la segunda y obtenemos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

9. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, encuentra la matriz X que cumple B · X = A + B.

Despejando X en la ecuación B · X = A + B, obtenemos: $X = B^{-1} \cdot (A + B)$.

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz A + B es $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, la matriz buscada es $X = B^{-1} \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, responde a las cuestiones siguientes:

a) Calcula $A \cdot A^t - B \cdot B^t$. b) Calcula $(C^{-1})^2$. c) ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$?

a) Hallamos $A \cdot A^t - B \cdot B^t$:

$$A \cdot A^t - B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$$

b) La inversa de la matriz C es $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Por tanto, $(C^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

c) La matriz $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ no es invertible ya que su determinante es nulo.

11. Sean *A* y *B* las siguientes matrices: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz inversa de *A* – *B*.

b) Halla la matriz *X* tal que *X* (*A* – *B*) = 2*A* – 3*B*.

a) La matriz *A* – *B* es $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa de *A* – *B* es $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos la matriz *X* de la ecuación matricial *X* (*A* – *B*) = 2A – 3B y obtenemos:

$$X = (2A - 3B) \cdot (A - B)^{-1}.$$

La matriz 2*A* – 3*B* es $2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz *X* es $X = (2A - 3B) \cdot (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

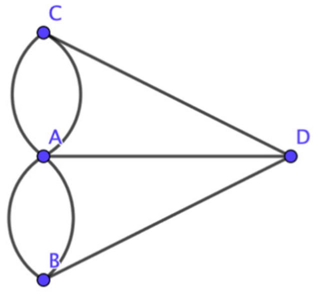
PROYECTO página 36

Aquí mostramos algunas soluciones al proyecto planteado. Los apartados que no están resueltos es porque son específicos de cada grupo.

1. La palabra grafo procede del griego y significa trazar. Un grafo consta de un conjunto de puntos, llamados vértices, y un conjunto de líneas o aristas.

El origen de la teoría de grafos está en la situación–problema que había en el siglo XVIII en la antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) relativa a que el rio Pregel dividía la ciudad en cuatro regiones unidas a través de siete puentes. Euler se planteó la pregunta: ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, cruzando todos los puentes solo una vez cada uno y regresando al punto de partida?

Euler determinó que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. Si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de él es por una línea diferente. Esto quiere decir que tanto el punto inicial como el final deben ser los únicos conectados con un número impar de líneas. Pero como el problema dice que el punto inicial debe ser igual al final no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.



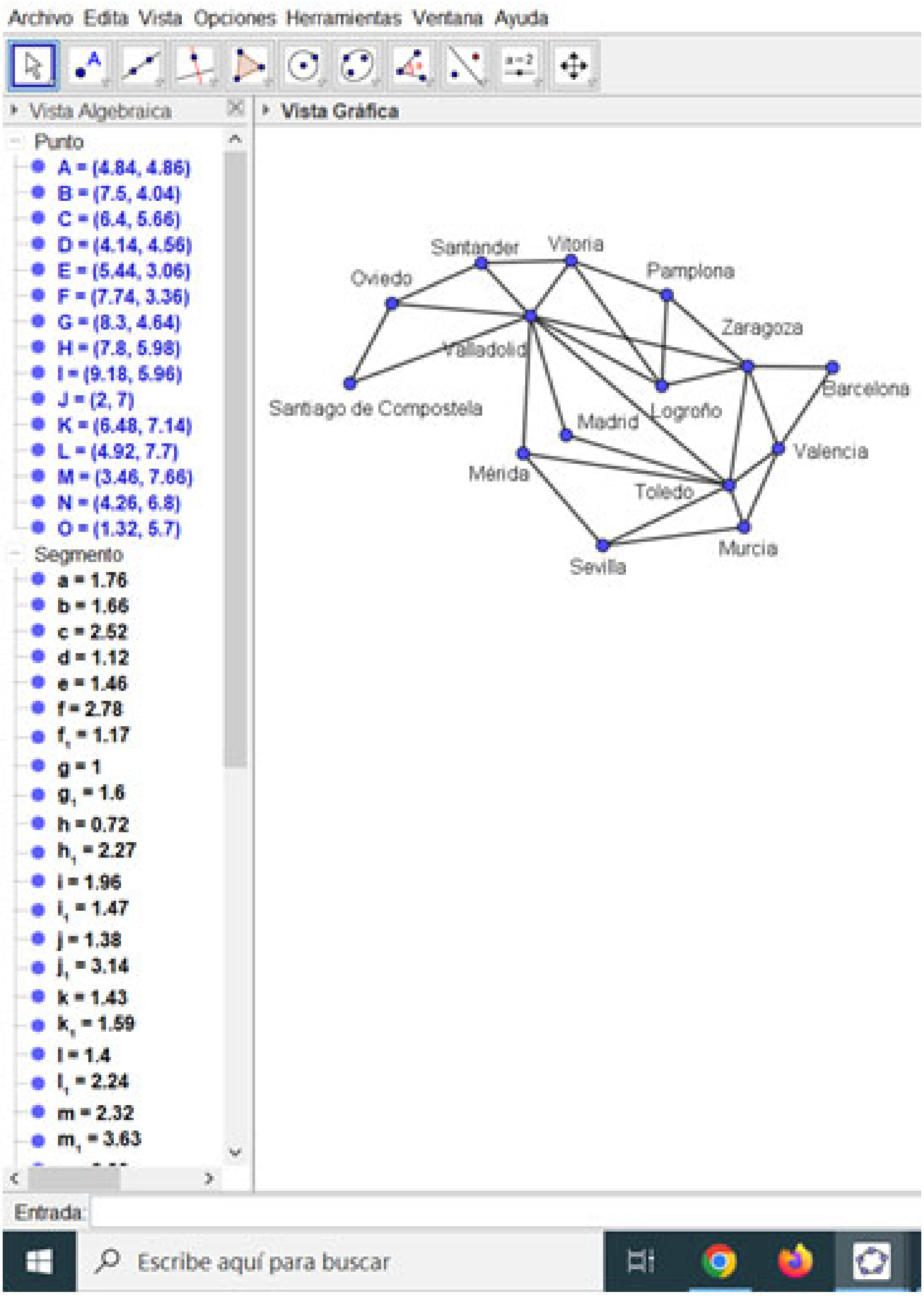
En el dibujo podemos ver un grafo relativo a los puentes de Königsberg, los vértices A y D son las islas y las aristas los puentes. Los cuatro vértices tienen un número impar de aristas, los vértices B, C y D tienen tres y el vértice A tiene cinco. Por tanto, el recorrido que se pide es imposible.

Investigad sobre si este grafo es euleriano. En la teoría de grafos, un **camino euleriano** es un camino que pasa por cada arista una y solo una vez. Un **circuito euleriano** es un camino euleriano cerrado. Un **grafo euleriano** es un grafo que admite un circuito euleriano. Un grafo euleriano es aquél que no tiene más de dos vértices impares.

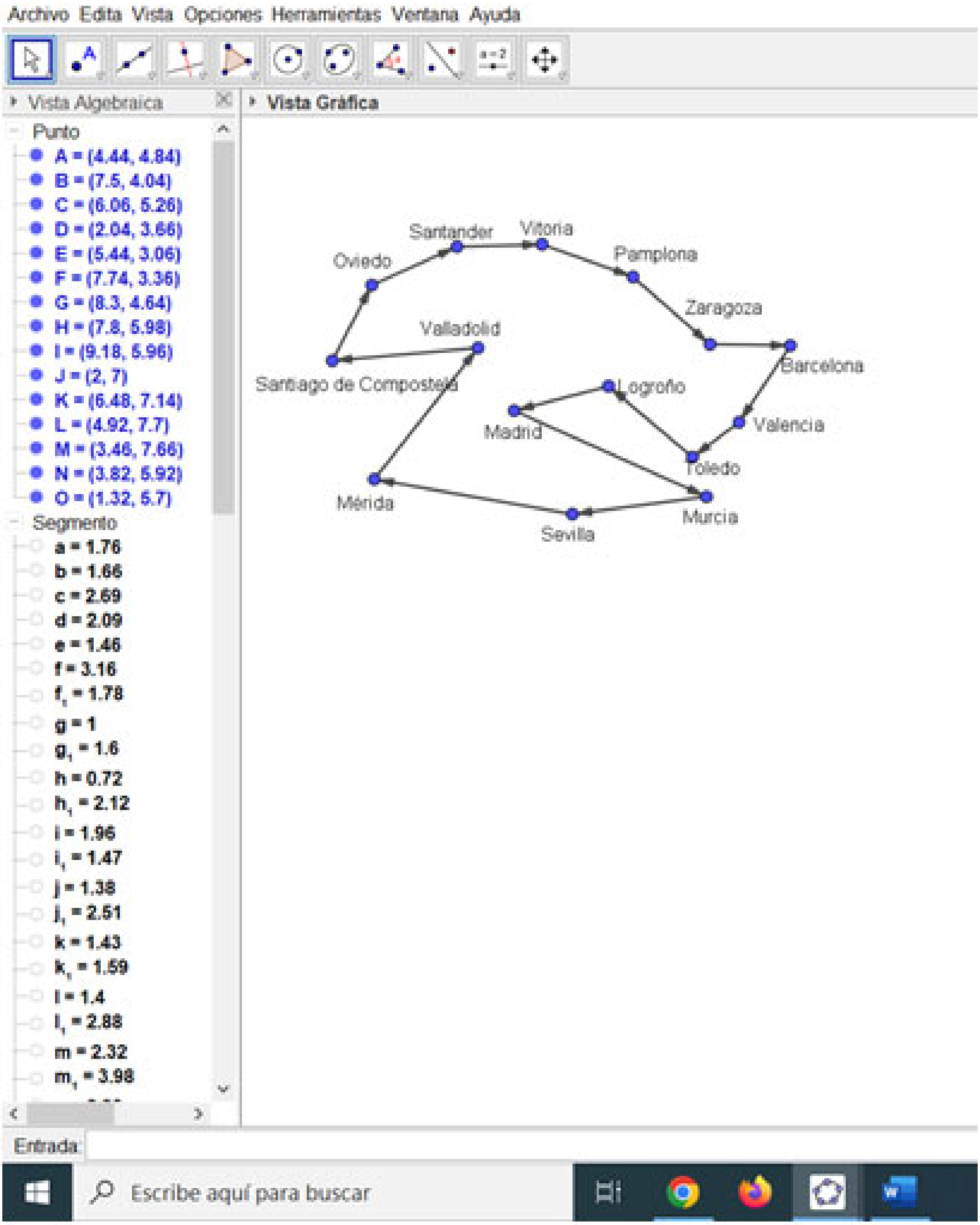
2. En este mapa de España peninsular en el que los puntos indican las capitales de cada comunidad autónoma, ¿podríais recorrer todas estas ciudades sin pasar por ninguna de ellas más de una vez?

Reducid el problema a un grafo. ¿De dónde habría que salir? Investigad si hay alguna desde la que se salga y, recorriendo todas las demás solo una vez, se regrese a la ciudad de partida.

En la imagen vemos un grafo con posibles soluciones:



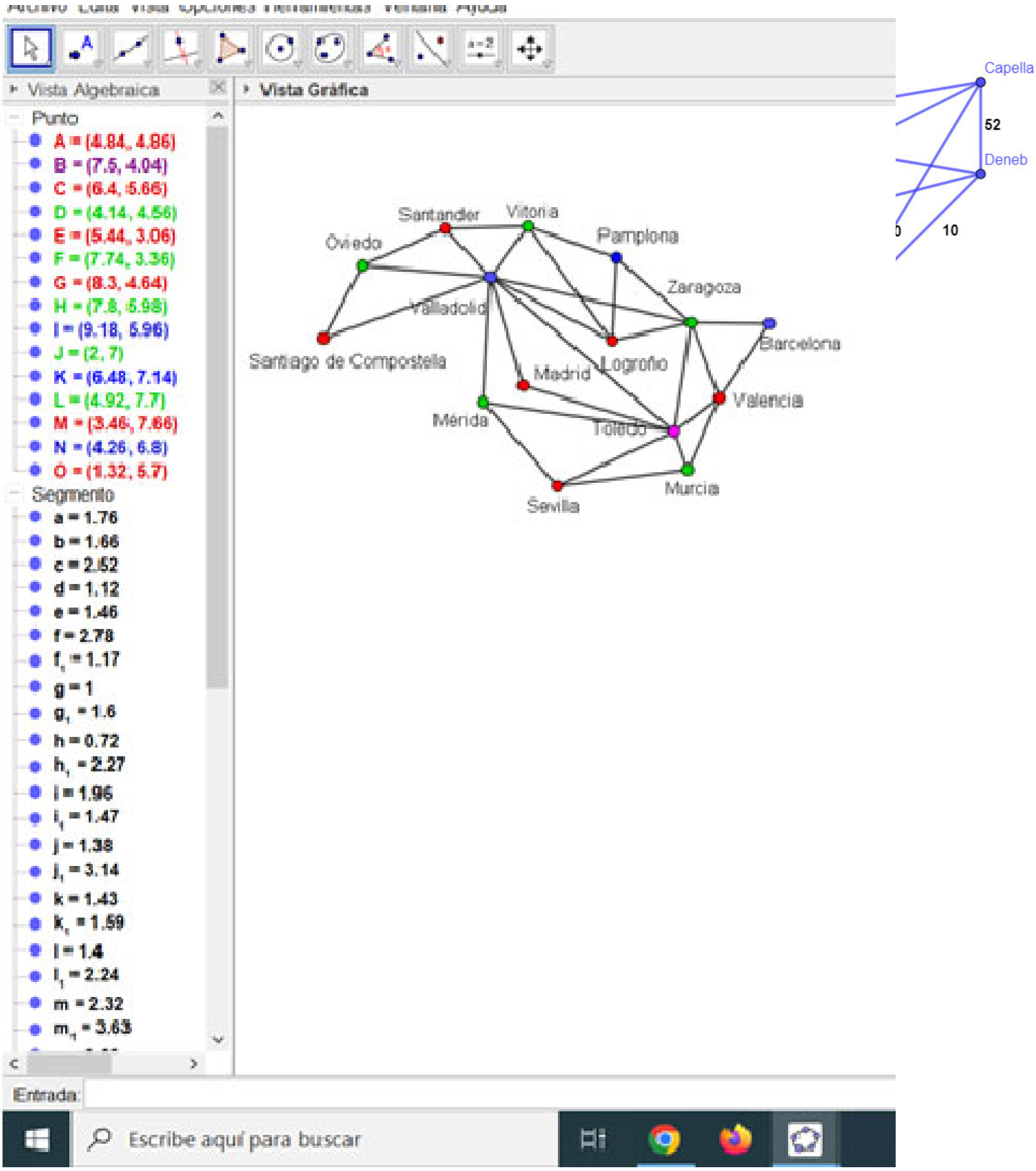
En la imagen vemos una posible solución saliendo de Valladolid y regresando a la misma ciudad:



3. El teorema de los cuatro colores dice:

Cualquier mapa geográfico con regiones continuas puede ser coloreado con, a lo sumo, cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones contiguas con el mismo color.

En la imagen tenemos una posible solución. Hemos necesitado 4 colores.



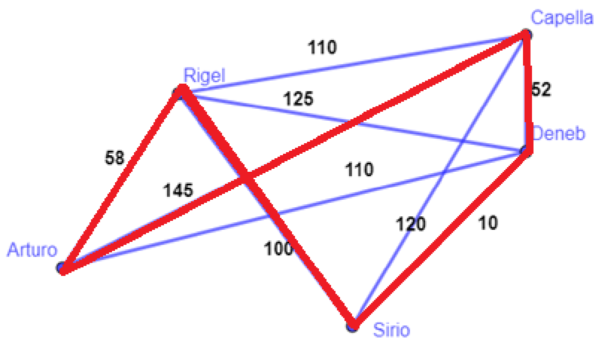
4. Individual

5. En el grafo de la imagen están indicadas las distancias, en kilómetros, entre las cinco paradas de un autobús interurbano.

Encontrad el camino de mínima distancia que debería hacer este autobús partiendo de la parada Arturo y volviendo a la misma pasando una sola vez por todas y cada una de las restantes paradas.

En él vemos que hay 4! = 24 caminos distintos partiendo de Arturo y llegando a Arturo, de los cuales la mitad son simétricos de la otra mitad.

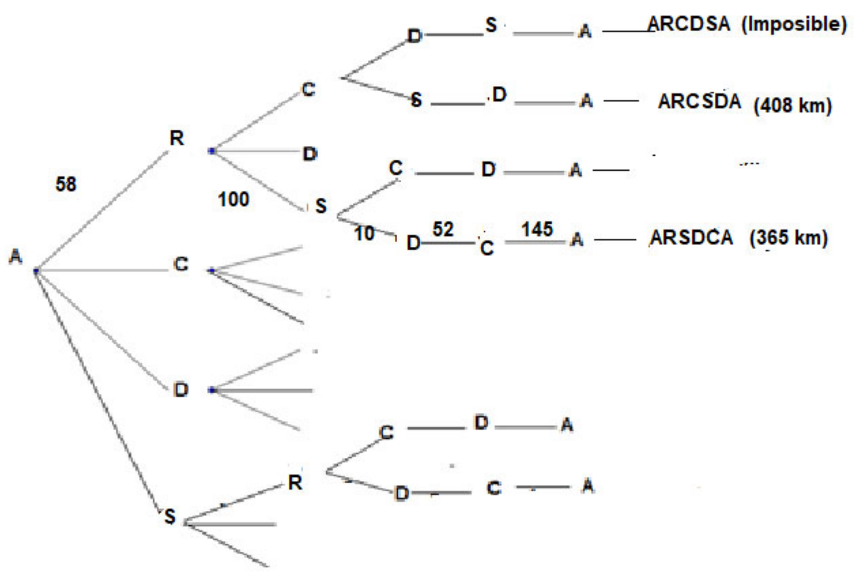
Hacemos un diagrama de árbol con los 12 recorridos posibles. Ponemos la inicial de cada parada. Algunos recorridos son imposibles pues, por ejemplo, no hay autobús de S a A. Completando el diagrama vemos que el recorrido óptimo de distancia mínima que resuelve el problema es ARSDCA con 365 km.



En el grafo dado hemos señalado con línea más gruesa la solución buscada.

En total los recorridos son:

ARCDSA…………Imposible	ARCSDA…………408 km
ARDCSA…………Imposible	ARDSCA…………458 km
ARSCDA………440 km	ARSDCA………365 km
ACRDSA……… Imposible	ACRSDA………475 km
ACDRSA………Imposible	ACSRDA………600 km
ADRCSA………Imposible	ADCRSA………Imposible



ARCDSA (Imposible)
ARCSDA (408 km)
ARSDCA (365 km)
58
100
10
52
145
A
R
C
D
S