1

Teoría de conjuntos

1. Conjuntos. Definiciones
2. Diagramas de Venn
3. Operaciones con conjuntos
4. Cardinal de un conjunto
5. Mosaicos y frisos

Los conjuntos sirven para clasificar cosas, dividiéndolas en categorías.

Un **conjunto** es una colección de objetos que tienen algo en común: cada uno es un elemento del conjunto.

Hay dos formas de definir un conjunto

- **Por extensión:** cuando es posible enumerar todos sus elementos. En este caso la notación empleada es incluir todos los elementos entre llaves.
- **Por comprensión:** cuando se utiliza una propiedad común para enumerar todos los elementos.

Así, el conjunto A = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} está definido por extensión y el conjunto A = {Días de la semana} está definido por comprensión.

Teoría de conjuntos

1. Conjuntos. Definiciones

Si un elemento, a, está en un conjunto A diremos que pertenece al conjunto, y se notará $a \in A$. En caso contrario se escribirá $a \notin A$.

Por ejemplo, en el conjunto $A = \{1, 2\}$ podemos escribir $1 \in A$ y $3 \notin A$.

Los conjuntos pueden ser **finitos,** cuando tienen un número finito de elementos; o **infinitos,** aquellos que tienen un número infinito de elementos.

Un ejemplo de un conjunto infinito es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$; los puntos suspensivos significan que quedan muchos números por escribir, tantos que es imposible enumerarlos todos.

Sin embargo, el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 14\}$ es un conjunto finito; los puntos suspensivos no significan que el conjunto sea infinito, ya que acaba en el número 14. Se utilizan para abreviar y no tener que escribir, en este caso, todos los números naturales entre 1 y 14. Otra forma de escribir el conjunto A sería: $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 14\}$.

Igualdad de conjuntos. Propiedades

Dos conjuntos son **iguales** si, y solo si, tienen los mismos elementos.

Las propiedades de la igualdad de conjuntos son:

a) Propiedad **reflexiva** $A = A$

Esta propiedad se traduce en que todo conjunto es igual a sí mismo.

b) Propiedad **simétrica,** si $A = B$ entonces $B = A$

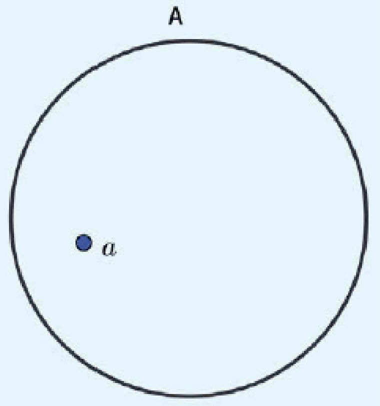
Si un conjunto es igual a otro, entonces este segundo también es igual al primero.

c) Propiedad **transitiva,** si $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$

Si dos conjuntos son iguales, y uno de ellos igual a un tercero, entonces los tres conjuntos son iguales entre sí.

Una forma muy intuitiva y práctica de representar los conjuntos son los diagramas de Venn.

Los **diagramas de Venn** constituyen una forma de representar los conjuntos gráficamente. Esta notación facilita muchas veces algunos razonamientos. Un conjunto ***A*** se dibuja como un círculo o un óvalo, de forma que si $a \in A$ se tendría:



El conjunto universal ***U*** se suele representar con un rectángulo que contiene todos los elementos que se están considerando.

Inclusión de conjuntos

Un conjunto A está **contenido** en otro conjunto B, y se escribe $A \subset B$, cuando todos los elementos de A también son elementos de B, y existen elementos de B que no pertenecen a A. Se dice que A es un **subconjunto** de B.

Propiedades de la inclusión de conjuntos

a) El conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos $\varnothing \subset A$, para todo conjunto A.

b) Todo conjunto A es subconjunto de U, el conjunto universal, $A \subset U$.

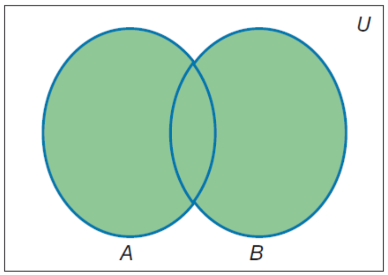
c) De lo anterior se deduce que $\varnothing \subset A \subset U$.

d) Transitiva: $A \subset B$, $B \subset C$, implica $A \subset C$.

Unión de conjuntos

Si tenemos dos conjuntos *A* y *B*, llamamos **conjunto unión de *A* y *B*** al conjunto que contiene a los elementos de *A* o de *B* o de ambos.

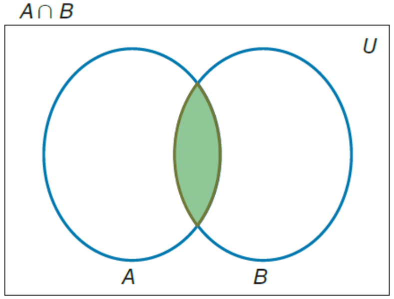
$A \cup B$



Intersección de conjuntos

Se denomina **conjunto intersección de *A* y *B*,** y se nota $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez al conjunto *A* y al conjunto *B*.

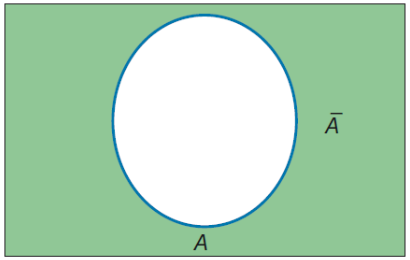
$A \cap B$



Conjunto complementario

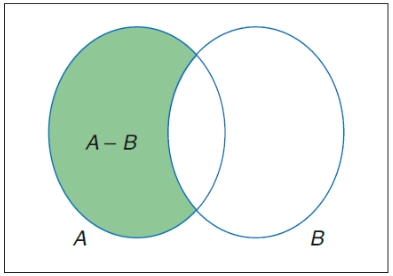
Dado un conjunto A del conjunto universal se denomina **complementario de A,** y se nota $\overline{A}$, al conjunto de todos los elementos del conjunto universal que no están en A.

Se verifica: $A \cup \overline{A} = U$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$



Diferencia de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se denomina **diferencia de A y B** y se nota $A - B$ al conjunto formado por los elementos de A que no están en B, es decir, el conjunto $A \cap \overline{B}$.



Propiedades

Las operaciones unión e intersección verifican las siguientes propiedades:

PROPIEDADES	UNIÓN	INTERSECCIÓN
1. Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. Elementos neutros	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
7. Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

LEYES DE MORGAN

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, se define el **producto cartesiano** de ambos, y se nota $A \times B$, como el conjunto de pares ordenados donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B:

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Por ejemplo, si tenemos: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, e, i, o, u\}$

$A \times B = \{(1, a), (1, e), (1, i), (1, o), (1, u), (2, a), (2, e), (2, i), (2, o), (2, u), (3, a), (3, e), (3, i), (3, o), (3, u)\}$

B \ A	1	2	3
a	$(1, a)$	$(2, a)$	$(3, a)$
e	$(1, e)$	$(2, e)$	$(3, e)$
i	$(1, i)$	$(2, i)$	$(3, i)$
o	$(1, o)$	$(2, o)$	$(3, o)$
u	$(1, u)$	$(2, u)$	$(3, u)$

Si un conjunto A posee n elementos distintos, siendo n un número entero no negativo, entonces se dice que A es finito y n es su cardinal. El **cardinal** de un conjunto A se nota $|A|$.

Principio de comparación

Si $A \subset B$, entonces $|A| \leq |B|$, y $|B - A| = |B| - |A|$

Principio de inclusión - exclusión

- Dados dos conjuntos disjuntos A y B, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- En caso de que A y B no sean disjuntos, tenemos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Principio de multiplicación

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Principio de adición

En general, si tenemos A_1, A_2, A_3,......, A_n conjuntos disjuntos dos a dos, entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots |A_n|$$

Principio de división

En un conjunto finito A, que se puede descomponer como unión de n subconjuntos disjuntos dos a dos, cada uno con k elementos, se verifica $n = \frac{|A|}{k}$.

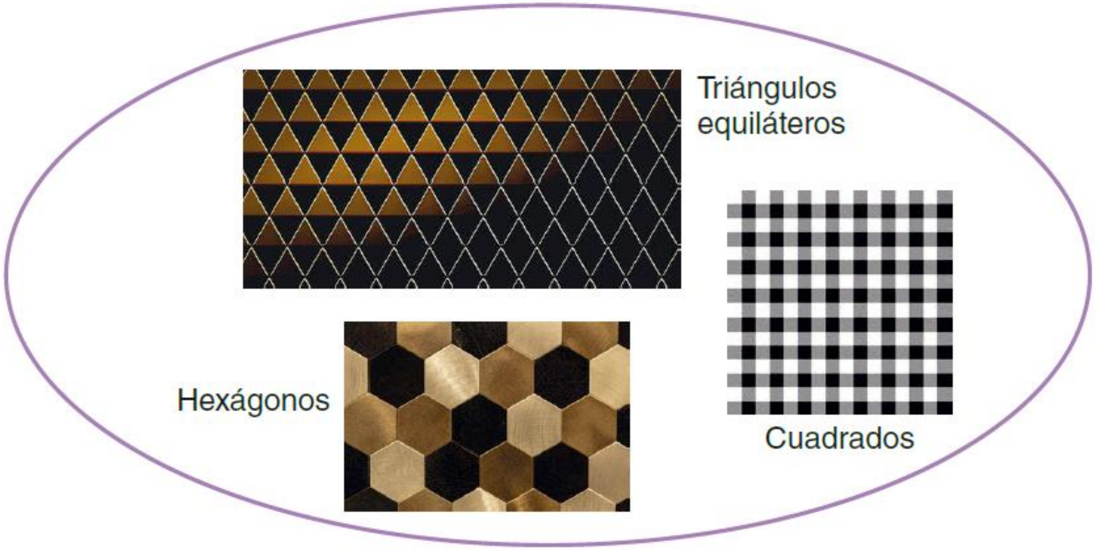
Principio del palomar

El principio del palomar o principio de Dirichlet establece que en un palomar con más palomas que nidos al menos hay dos palomas que ocupan el mismo nido.

Conjunto de mosaicos

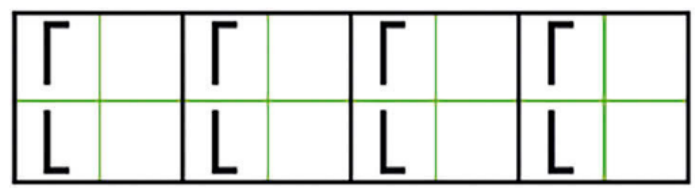
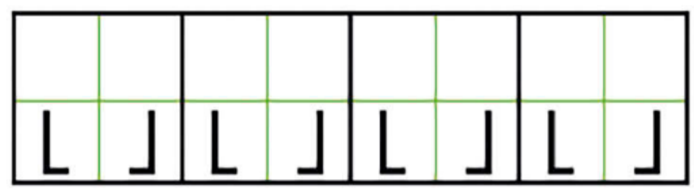
Teselar el plano consiste en recubrirlo con figuras geométricas sin que queden huecos y sin que se solapen unas con otras.

Un **mosaico** es una forma de teselar el plano.

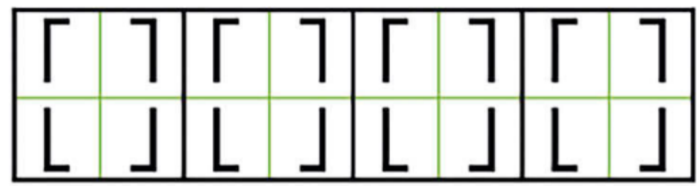


Conjunto de frisos

Un **friso** es una forma de teselar una región de plano entre rectas paralelas. Los frisos tienen longitud infinita y anchura constante.

TIPO I. FRISO DE LAS TRASLACIONES	
TIPO II. FRISO DE LA SIMETRÍA HORIZONTAL	
TIPO III. FRISO DE LA SIMETRÍA VERTICAL	

Conjunto de frisos

TIPO IV. FRISO DE LAS ROTACIONES (180°)	
TIPO V. FRISO MÁS COMPLETO	
TIPO VI. FRISO DE LAS TRASLACIONES Y EL DESLIZAMIENTO	
TIPO VII. FRISO DE LOS GIROS Y DEL DESLIZAMIENTO