1

Matrices

1. Matrices
2. Tipos de matrices
3. Operaciones con matrices
4. Producto de matrices
5. Trasposición de matrices. Matriz simétrica y antisimétrica
6. Matriz inversa
7. Rango de una matriz
8. Las matrices en la vida real

- Se llama **matriz de dimensión $m \times n$** a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz A se puede designar también como:

$$A = (a_{ij}) \qquad \text{donde: } \begin{cases} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

- Un **elemento** genérico de la matriz se designa por a_{ij}, donde el subíndice i representa el número de fila que ocupa el elemento y el subíndice j el número de columna.

Conjuntos de matrices

- El conjunto de matrices de dimensión $m \times n$ se denota por:

$$M_{m \times n}$$

- El conjunto de matrices de dimensión $n \times n$, también llamadas de **orden *n***, se denota por:

$$M_n$$

Las matrices de este conjunto se llaman **matrices cuadradas** y en ellas definimos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Matrices rectangulares

- **Matriz rectangular** es aquella que tiene distinto número de filas que de columnas ($m \neq n$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz rectangular } 2 \times 3$$

- **Matriz fila** es toda matriz rectangular con una sola fila, de dimensión $1 \times n$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz fila } 1 \times 4$$

- **Matriz columna** es toda matriz rectangular con una sola columna, de dimensión $m \times 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz columna } 2 \times 1$$

- **Matriz nula** es una matriz con todos sus elementos nulos. Se denota por O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz nula } 3 \times 2$$

Matrices cuadradas

- **Matriz cuadrada de orden *n*** es aquella que tiene igual número de filas que de columnas ($m = n$).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz cuadrada de orden 2}$$

- **Matriz triangular** es aquella que tiene nulos todos los términos situados por debajo (triangular superior) o por encima (triangular inferior) de la diagonal principal.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz triangular superior de orden 3}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz triangular inferior de orden 4}$$

Matrices cuadradas

- **Matriz diagonal** es toda matriz cuadrada en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz diagonal de orden 3}$$

- **Matriz escalar** es toda matriz diagonal en la que todos los términos de la diagonal principal son iguales.

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz escalar de orden 2}$$

- **Matriz unidad** es la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos. Se designa por I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriz unidad de orden 3}$$

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Suma de matrices

Para dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión $m \times n$, **la suma de *A* y *B*** es la matriz de la misma dimensión $m \times n$ dada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir, la suma de $A + B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Producto por un número (escalar)

Para un número real k y una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$, **el producto de un número real por una matriz** es la matriz de la misma dimensión $m \times n$ dada por:

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

Es decir, el producto $k \cdot A$ se obtiene multiplicando el número real por cada uno de los elementos de la matriz.

El número real *k* que multiplica a la matriz se denomina escalar.

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

El **producto de dos matrices,** $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ de dimensión $n \times p$, es la matriz $A \cdot B$ de dimensión $m \times p$ dada por:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} \quad \text{o bien} \quad (a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik}) \text{ con:}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Es decir, cada elemento c_{ik} se obtiene multiplicando ordenadamente los elementos de la fila i-ésima de la primera matriz por los elementos de la columna k-ésima de la segunda matriz y sumando los resultados.

$$\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Propiedades del producto de matrices cuadradas

El producto de matrices cuadradas es **asociativo:**

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices cuadradas

- El producto de matrices cuadradas de orden n posee como **elemento neutro** la matriz unidad o identidad de orden n, I, ya que:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \; A \cdot I = A$$

- El producto de matrices cuadradas es **distributivo respecto de la suma** de matrices:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \; I \cdot A = A$$

Propiedades del producto de matrices cuadradas

El producto de matrices cuadradas es, en general, **no conmutativo:**

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

En el caso de que existan dos matrices A y B que cumplan que $AB = BA$, se dice que A y B conmutan.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Se llama **matriz traspuesta** de una matriz A de dimensión $m \times n$ a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por columnas o las columnas por filas. Se representa por A^t y su dimensión es $n \times m$. Si la matriz es cuadrada su traspuesta tiene el mismo orden.

Las principales propiedades de la trasposición de matrices son:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ con $k \in \mathbb{R}$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

3×4

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

4×3

Matriz simétrica

La **matriz simétrica** se puede definir de dos formas:

- Se llama *matriz simétrica* a toda matriz cuadrada A que coincide con su traspuesta:

$$A = A^t$$

- Se llama *matriz simétrica* a toda matriz cuadrada que tiene iguales los elementos simétricos respecto a la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica

La **matriz antisimétrica (hemisimétrica)** se puede definir de dos formas:

- Se llama *matriz antisimétrica* (o *hemisimétrica*) a toda matriz cuadrada A que coincide con la opuesta de su traspuesta:

$$A = -A^t$$

- Se llama *matriz antisimétrica* a toda matriz cuadrada que tiene opuestos los elementos simétricos respecto a la diagonal principal y nulos los elementos de esta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & r \\ -y & -t & 0 & s \\ -z & -r & -s & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

- La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A de orden n es la matriz A^{-1} de orden n que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- Las matrices que tienen inversa se llaman **matrices regulares,** y las que no tienen inversa **matrices singulares.**

Cálculo de la matriz inversa

Para calcular la matriz inversa de una matriz regular podemos utilizar dos procedimientos:

- Mediante la definición.
- Método de Gauss-Jordan

Mediante la definición

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ 3a+7c=0 \\ b+2d=0 \\ 3b+7d=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=7 \\ b=-2 \\ c=-3 \\ d=1 \end{array}\right.$$

Luego la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

La inversa de una matriz regular A se calcula transformando la matriz $(A \mid I)$, mediante operaciones elementales por filas, en la matriz $(I \mid A^{-1})$:

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{operaciones elementales}} (I \mid A^{-1})$$

Al aplicar el método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de una matriz A puede ocurrir que, al efectuar alguna de las operaciones elementales por filas, se obtenga una o más filas nulas en la matriz $(A \mid I)$.

En este caso, la matriz A no tiene inversa, es decir, es singular.

Operaciones elementales por filas

Las operaciones elementales por filas en una matriz nos permiten, entre otras cosas, calcular matrices inversas y estudiar rangos de matrices.

Se denominan **operaciones elementales por filas** en una matriz las siguientes:

- **Intercambiar** las filas *i* y *j*, que designaremos por $F_i \leftrightarrow F_j$.
- **Multiplicar** la fila *i* por el número $k \neq 0$ y sustituirla por el resultado; lo designamos por $F_i \rightarrow kF_i$.
- **Sumar** las filas *i* y *j*, multiplicadas por sendos números, y llevar el resultado a la fila *i* o *j*. Lo designamos por $F_j \rightarrow kF_i + tF_j$.

Rango de una matriz

El **rango** o **característica** de una matriz es el número de filas o de columnas no nulas y linealmente independientes que tiene esa matriz.

- En una matriz, una fila F_i no nula **depende linealmente** de las filas F_j, F_k, ..., F_t si se verifica:

$$F_i = x_1 F_j + x_2 F_k + \dots + x_n F_t \quad \text{con } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

- En una matriz, una fila F_i no nula es **linealmente independiente** de las filas F_j, F_k, ..., F_t si no se puede escribir en la forma anterior.

Para calcular el rango utilizamos las operaciones elementales por filas, ya que dejan invariante el rango de la matriz resultante. Las filas que dependen de otras se reducen a filas nulas mediante estas transformaciones. De forma similar, existen operaciones elementales por columnas que también dejan invariante el rango de la matriz.

Las matrices en la vida real

En muchas situaciones de la vida real se presentan gran cantidad de datos que por su volumen, son difíciles de manejar.

Para cuantificar tanta información y poder operar con ella resulta muy útil el distribuirla en forma de matrices para poder así operar con ella de forma fácil y ordenada.