CUESTIONES INICIALES de la página 10

1. Simplifica y expresa el resultado como potencia:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27$ **b)** $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25$ **c)** $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4}$

Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27 = (3^2)^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{4-2+3} = 3^5$

b) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} \cdot 5^2 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^8$

c) $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4} = \frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

2. Determina los valores aproximados de $\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$ y $\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$ truncando o redondeando:

a) A las décimas **b) A las milésimas** **c) A las millonésimas**

En las tablas aparecen los valores pedidos.

Truncamiento de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,7	2,4
b) A las milésimas	0,774	2,449
c) A las millonésimas	0,774 596	2,449 489

Redondeo de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,8	2,4
b) A las milésimas	0,775	2,449
c) A las millonésimas	0,774 597	2,449 490

3. Comprueba la siguiente igualdad elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\sqrt{11-4\sqrt{6}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\left(\sqrt{11-4\sqrt{6}}\right)^2 = 11 - 4\sqrt{6}$$

$$\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 8 + 3 - 4\sqrt{6} = 11 - 4\sqrt{6}$$

4. ¿Para qué valores de n y a se cumple $\sqrt[n]{a} \in R$?

Las raíces enésimas son números reales siempre que:

- **n** sea par y **a** sea un número real no negativo.

- **n** sea impar y **a** sea un número real cualquiera.

ACTIVIDADES de la página 12

1. Ordena, de menor a mayor, los números enteros: + 18, - 20; + 13; - 11; 0; - 17 y – 9.

La ordenación es: - 20 < - 17 < - 11 < - 9 < 0 < + 13 < + 18.

2. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4$

b) $-(4 - 9 + 3) + (11 - 8 - 7) + (-15)$

c) $2^3 \cdot 2^2 + 3^6 : 3^3 + 5^2 \cdot 5^2$

d) $2^3 \cdot 2^2 - 3^6 : 3^3 - 5^2 \cdot 5^2$

Las soluciones son:

a) – 3

c) 684

b) – 17

d) - 620

3. Expresa como una sola potencia:

a) $(2^2)^5 \cdot (2^4)^2$

d) $\left[(-8)^3\right]^3 : \left[(-8)^2\right]^2$

b) $(6^3)^3 \cdot (6^2)^4$

e) $(3^5)^2 : (3^3)^3$

c) $\left[(-4)^3\right]^5 \cdot \left[(-4)^3\right]^4$

f) $\left[(-2)^3\right]^5 : (-2)^4$

Las soluciones son:

a) 2^{18}

d) $(-8)^5$

b) 6^{17}

e) 3^1

c) $(-4)^{27}$

f) $(-2)^{11}$

ACTIVIDADES de la página 14

4. Opera: a) $\frac{1}{3} - \left(-2 + \frac{3}{5}\right)$ **b)** $-7 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{7}\right)$ **c)** $\frac{1}{7} : \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{-3}{5}\right)$

Los resultados de las operaciones son:

a) $\frac{26}{15}$ b) $-\frac{117}{14}$ c) $-\frac{10}{21}$

5. Calcula, utilizando fracciones generatrices:

a) 3,75 + $2,\widehat{8}$ **b)** $5,0\widehat{6} - 2,9\widehat{5}$.

Los resultados son:

a) $3,75 + 2,\widehat{8} = \frac{375}{100} + \frac{26}{9} = \; = \frac{239}{36} = 6,63\widehat{8}$

b) $5,0\widehat{6} - 2,9\widehat{5} = \frac{456}{90} - \frac{266}{90} = \frac{190}{90} = \frac{19}{9} = 2,\widehat{1}$

6. Efectúa y expresa el resultado en forma de potencia de exponente natural:

a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{3}$ **b)** $\left(1+\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

Operando, obtenemos:

a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6} = \left(\frac{5}{2}\right)^{6}$

b) $\left(1+\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{4}\right)^{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{0}$

ACTIVIDADES de la página 18

7. Dado el número de oro Φ = 1,61803398..., calcula las siguientes aproximaciones decimales:

a) A unidades por exceso.

b) A centésimas por defecto.

Las aproximaciones pedidas son:

a) 2

b) 1,61.

8. Halla en cada caso dos números que sean valores exactos de las aproximaciones decimales dadas:

a) La aproximación decimal por exceso a décimas es 7,5.

b) La aproximación decimal por defecto a diezmilésimas es 641, 3526.

Los números que se piden pueden ser, por ejemplo:

a) 7,42 y 7,475

b) 641,352613 y 641,352682.

ACTIVIDADES de la página 20

9. Completa la siguiente tabla:

Valor exacto	Aproximación decimal a centésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a décimas por exceso y cota de error	Redondeo a milésimas y cota de error	Truncamiento a milésimas y cota de error
Φ = 1,61803…				
π = 3,14159…				
e = 2,71828…				
$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$				

La tabla completa aparece a continuación:

Valor exacto	Aproximación decimal a centésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a décimas por exceso y cota de error	Redondeo a milésimas y cota de error	Truncamiento a milésimas y cota de error
Φ = 1,61803…	aproximación:1,61 cota de error: 0,01	aproximación:1,7 cota de error: 0,1	redondeo:1,618 cota de error: 0,0005	truncamiento:1,618 cota de error: 0,001
π = 3,14159…	aproximación:3,14 cota de error: 0,01	aproximación:3,2 cota de error: 0,1	redondeo:3,142 cota de error: 0,0005	truncamiento:3,141 cota de error: 0,001
e = 2,71828…	aproximación:2,71 cota de error: 0,01	aproximación:2,8 cota de error: 0,1	redondeo:2,718 cota de error: 0,0005	truncamiento:2,718 cota de error: 0,001
$\sqrt{2} = 1,41421...$	aproximación:1,41 cota de error: 0,01	aproximación:1,5 cota de error: 0,1	redondeo:1,414 cota de error: 0,0005	truncamiento:1,414 cota de error: 0,001

10. Tomando como valor exacto del número cordobés $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 1,30656296...$, halla la aproximación a milésimas por defecto y por exceso y los errores absoluto y relativo que se cometen en cada una de ellas. ¿Cuál de estas aproximaciones crees que sería mejor?

La aproximación a milésimas por defecto es 1,306.

El error absoluto que se comete es: |1,30656296… - 1,306| = 0,00056296.

El error relativo que se comete es: $\dfrac{0,00056296...}{1,30656296...} = 0,00043087093...$

La aproximación a milésimas por exceso es 1,307.

El error absoluto que se comete es: $|1,30656296... - 1,307| = 0,00043704....$

El error relativo que se comete es: $\dfrac{0,00043704...}{1,30656296...} = 0,00033449593...$

En este caso, es mejor la aproximación por exceso, ya que su valor produce un error absoluto y un error relativo menor que la aproximación por defecto.

ACTIVIDADES de la página 21

11. Expresa en notación científica e indica el orden de magnitud en cada caso:

a) 57 billones **b) 623 cienmillonésimas** **c) 0,035 millones** **d) 12 milésimas**

Las expresiones buscadas y los órdenes de magnitud son:

a) 57 billones = 57 000 000 000 000 = $57 \cdot 10^{12} = 5,7 \cdot 10^{13}$. La cantidad cumple: $10^{13} < 5,7 \cdot 10^{13} < 10^{14}$ y el orden de magnitud es 10^{14}.

b) 623 cienmillonésimas = $623 \cdot 0,000\,000\,01 = 0,000\,006\,23 = 6,23 \cdot 10^{-6}$. La cantidad cumple: $10^{-6} < 6,23 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$ y el orden de magnitud es 10^{-5}.

c) 0,035 millones = $0,035 \cdot 10^{6} = 35\,000 = 3,5 \cdot 10^{4}$. La cantidad cumple: $10^{4} < 3,5 \cdot 10^{4} < 10^{5}$ y el orden de magnitud es 10^{4}.

d) 12 milésimas = $12 \cdot 0,001 = 0,012 = 1,2 \cdot 10^{-2}$. La cantidad cumple: $10^{-2} < 12 \cdot 10^{-2} < 10^{-1}$ y el orden de magnitud es 10^{-2}.

12. Efectúa las siguientes operaciones utilizando la calculadora e indica el orden de magnitud del resultado:

a) $(2,32 \cdot 10^{4}) \cdot (7,2 \cdot 10^{-3})$ **b)** $(6,215 \cdot 10^{5}) : (3,25 \cdot 10^{-2})$

Los resultados y los órdenes de magnitud son:

a) $(2,32 \cdot 10^{4}) \cdot (7,2 \cdot 10^{-3}) = 167,04 = 1,6704 \cdot 10^{2}$. La cantidad cumple: $10^{2} < 1,6704 \cdot 10^{2} < 10^{3}$ y el orden de magnitud es 10^{2}.

b) $(6{,}215 \cdot 10^5) : (3{,}25 \cdot 10^{-2}) = 19123076{,}92 = 1{,}912307692 \cdot 10^7$. La cantidad cumple: $10^7 < 1{,}912307892 \cdot 10^7 < 10^8$ y el orden de magnitud es 10^7.

ACTIVIDADES de la página 22

13. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{128}$ **d)** $\sqrt[3]{-64a^{12}b^{18}c^{13}}$ **g)** $\sqrt{\dfrac{3^{11}}{a^8}}$ **j)** $\sqrt{125a^{15}b^{16}}$

b) $\sqrt{a^8b^3}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}001a^6}$ **h)** $\sqrt[4]{2401x^{15}}$ **k)** $\sqrt[4]{\dfrac{81x^6}{y^2}}$

c) $\sqrt[8]{x^2}$ **f)** $\sqrt[5]{-32a^7b^6c^{10}}$ **i)** $\sqrt[6]{16y^8}$ **l)** $\sqrt{a^2+a^4}$

Teniendo en cuenta los radicales equivalentes, en cada caso, los radicales simplificados son:

a) $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

b) $\sqrt{a^8b^3} = a^4b\sqrt{b}$

c) $\sqrt[8]{x^2} = \sqrt[4]{x}$

d) $\sqrt[3]{-64a^{12}b^{18}c^{13}} = -4a^4b^6c^4\sqrt[3]{c}$

e) $\sqrt[3]{0{,}001a^6} = 0{,}1a^2$

f) $\sqrt[5]{-32a^7b^6c^{10}} = -2abc^2\sqrt[5]{a^2b}$

g) $\sqrt{\dfrac{3^{11}}{a^8}} = \dfrac{3^5\sqrt{3}}{a^4}$

h) $\sqrt[4]{2401x^{15}} = 7x^3\sqrt[4]{x^3}$

i) $\sqrt[6]{16y^8} = y\sqrt[3]{4y}$

j) $\sqrt{125a^{15}b^{16}} = 5a^7b^8\sqrt{5a}$

k) $\sqrt[4]{\dfrac{81x^6}{y^2}} = 3x\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

l) $\sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1 + a^2}$

ACTIVIDADES de la página 23

14. Efectúa las siguientes operaciones con potencias y da el resultado en forma de potencia y en forma radical:

a) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$ **b)** $2^{\frac{3}{2}} : 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ **c)** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{4}{3}} : \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ **d)** $\dfrac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{0{,}2^{\frac{3}{2}}}$

Los resultados de estas operaciones en forma de potencia y en forma radical son:

a) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = \ldots = 3^{\frac{29}{12}} = \sqrt[12]{3^{29}} = 9\sqrt[12]{3^5}$

b) $2^{\frac{3}{2}} : 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = \ldots = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{3}} : \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{13}{12}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{3}{5}\right)^{13}} = \frac{3}{5}\sqrt[12]{\frac{3}{5}}$

d) $\dfrac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{0{,}2^{\frac{3}{2}}} = \ldots = 5^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{5^{10}} = 125\sqrt[3]{5}$

15. En cada uno de las siguientes igualdades, halla el valor de m para el cual se verifique la misma:

a) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{3}{7}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^{m}}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Los valores de m buscados son: a) m = 3 y b) $m = \frac{1}{6}$.

ACTIVIDADES de la página 25

16. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{98}$

b) $2\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54}$

c) $\left(5\sqrt[4]{32} - 2\sqrt[4]{162}\right) \cdot \sqrt[4]{8}$

d) $\left(2\sqrt{5} - 3\right)^2$

e) $\sqrt[4]{5^3 \cdot \sqrt{5^4 \cdot \sqrt[3]{5^2}}}$

f) $\dfrac{3\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + 5\sqrt{75}}{4\sqrt{3}}$

Los resultados de las operaciones son:

a) $3\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{98} = \ldots = 3\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} = \ldots = 4\sqrt[3]{2}$

c) $\left(5\sqrt[4]{32} - 2\sqrt[4]{162}\right) \cdot \sqrt[4]{8} = \ldots = 8$

d) $\left(2\sqrt{5}-3\right)^2 = \ldots = 29 - 12\sqrt{5}$

e) $\sqrt[4]{5^3\sqrt{5^4\sqrt[3]{5^2}}} = \ldots = 5\sqrt[3]{5}$

f) $\dfrac{3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+5\sqrt{75}}{4\sqrt{3}} = \ldots = \dfrac{15}{2}$

17. Racionaliza y opera lo más posible:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{25}{\sqrt[3]{5^2}} - \sqrt[3]{625}$ **c)** $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}$

Los resultados de la racionalización son:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \ldots = 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

b) $\dfrac{25}{\sqrt[3]{5^2}} - \sqrt[3]{625} = \ldots = 0$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3} = \ldots = 7 + 4\sqrt{3}$

ACTIVIDADES de la página 27

1. Los mentís y los verdís. En un planeta lejano viven dos comunidades de extraterrestres, los mentís y los verdís. Los mentís, haciendo honor a su nombre, siempre mienten; en cambio, los verdís siempre dicen la verdad. Un terrícola llegó a este planeta y se encontró con tres de sus habitantes. Uno le dijo algo que no entendió; el siguiente le dijo: «te ha dicho que es un mentís», a lo que el último le contestó a este: «tú eres un mentiroso». Esta última persona, ¿era mentís o verdís?

Analizamos en la tabla todos los casos posibles, considerando la notación siguiente: a los mentís con M y a los verdís con V.

CASOS			
	Primero	Segundo	Tercero
1	M	M	M
2	M	M	V
3	M	V	M
4	V	M	M
5	V	V	M
6	V	M	V
7	M	V	V
8	V	V	V
LO QUE DICE CADA UNO		***Te he dicho que es un mentís***	**Tú eres un mentiroso**

Los únicos casos que nos plantean una contradicción con el enunciado del problema son el tercero y el sexto.

● El caso tercero no es posible pues si el segundo es un verdís no puede decir «te ha dicho que es un mentís» ya que el anterior es un mentís y como mentiroso que es nunca diría soy un mentís.

● El caso sexto es válido pues:

- El primero es un verdís y habría dicho «soy un verdís».

- El segundo es un mentís, con lo cual, como miente, dice «te he dicho que es un mentís».

- El tercero es un verdís y como dice la verdad dice «tú eres un mentiroso».

Por tanto, los tres habitantes con los que se encontró el terrícola eran, en este orden: **verdís, mentís, verdís.**

Este es un problema de lenguaje lógico en cuya resolución, además de usar el razonamiento lógico hemos utilizado una notación adecuada a la situación.

2. División. El resultado de dividir dos números naturales de dos cifras en una calculadora ha sido 0,75609756. ¿Cuáles eran esos dos números?

Multiplicamos el número dado 0,75609756 por números de dos cifras hasta que nos de un número natural, así:

0,75609756 · 41 = 30.99999996

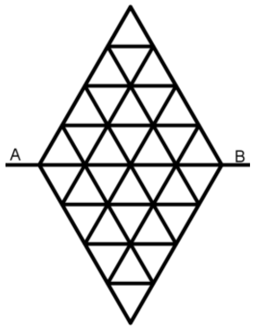
Por tanto, la solución es $\frac{31}{41} = 0{,}75609756$.

3. Repartir agua. Tenemos un gran depósito de agua y dos vasijas de 4 L y 9 L. ¿Cómo conseguir exactamente 6 L?

A continuación, se describe una solución.

Acción	1	2	3	4	5	6	7	8
Vasija 4 L	0	4	0	4	0	1	1	4
Vasija 9 L	9	5	5	1	1	0	9	6

4. Colores coincidentes. Cada una de las dos mitades de esta figura está compuesta por 16 triángulos pequeños, de los cuales hay coloreados tres de rojo, cinco de azul y ocho de verde. Al doblar la figura por la recta AB resulta que se superponen dos pares de triángulos rojos, tres pares de azules y encontramos dos pares rojo-verde.



¿Cuántos pares de triángulos verdes coinciden?

Buscamos una notación adecuada. Por ejemplo, llamamos R, A y V a los triángulos de color rojo, azul y verde, respectivamente.

A los 16 triángulos de arriba podemos nombrarlos de la forma:

R R R A A A A A V V V V V V V V

Con los datos que nos dan podemos escribir emparejando los triángulos, en la primera línea los triángulos de arriba y en la segunda línea los de abajo:

R R R   A A A A A   V V V V V V V V

R R V   A A A   R

En el diagrama anterior observamos que ya hemos ocupado todos los rojos, 1 de los verdes y 3 azules de la parte inferior.

Los dos azules que nos quedan no pueden ir con los azules, deberían ir con los verdes, lo que nos conduce a:

R R R   A A A A A   V V V V V V V V

R R V   A A A   R A A

Así pues, nos quedan 7 verdes en la parte inferior, de los cuales dos irán con azules y cinco acompañaran a verdes de la parte superior, por lo que son 5 los pares de triángulos verdes que coinciden.

MATEMÁTICAS de la página 28

1. Efectúa estas operaciones simplificando los resultados:

a) $\left[\frac{2}{7}\cdot\left(3-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{5}{7}$

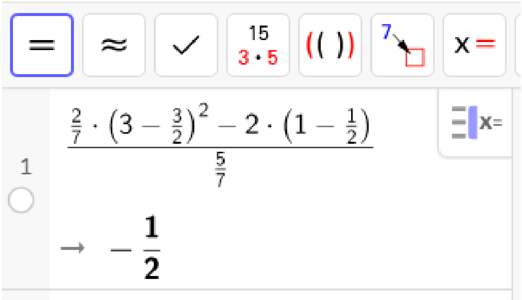
b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

Las soluciones de las operaciones son:

a) $\left[\frac{2}{7}\cdot\left(3-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{5}{7}=\ldots=-\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\ldots=6$

Las soluciones anteriores pueden verse en la imagen.



2 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

$\rightarrow$ **6**

ACTIVIDADES FINALES de la página 29

1. Ordena, de mayor a menor, los siguientes números: 0,5; - 0,4; 24; - 3,2; 0; - 30; 284.

La ordenación pedida es: 284 > 24 > 0,5 > 0 > -0,4 > - 3,2 > - 30.

2. Efectúa los siguientes cálculos haciendo uso de la jerarquía de las operaciones:

a) $9 - 4 \cdot (-6) + 5 - 7 \cdot (-4 + 9)$

b) $6 \cdot 4^2 - (-3)^3 + [5 - (7 - 5)^2]$

c) $(-5)^2 - 5^2 + 4 \cdot (-3)^2$

Las soluciones son:

a) $9 - 4 \cdot (-6) + 5 - 7 \cdot (-4 + 9) = 3$

b) $6 \cdot 4^2 - (-3)^3 + [5 - (7 - 5)^2] = 124$

c) $(-5)^2 - 5^2 + 4 \cdot (-3)^2 = 36$

3. Efectúa las siguientes operaciones y presenta el resultado lo más simplificado posible:

a) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}-3$

d) $\left(3-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(2-\dfrac{3}{7}\right):\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{4}\right)$

b) $\left(3-\frac{3}{2}\right)\cdot 2-3+\frac{2}{3}$

e) $3+2\cdot\left(1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)$

c) $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$

f) $2-2:\left(2-\frac{1}{4}\right)$

Los resultados son:

a) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{4}-3=-\frac{131}{60}$

d) $\left(3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2-\frac{3}{7}\right):\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{121}{91}$

b) $\left(3-\frac{3}{2}\right)\cdot 2-3+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

e) $3+2\cdot\left(1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{5}$

c) $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{6}$

f) $2-2:\left(2-\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{7}$

4. Efectúa, dejando el resultado en forma de potencia de exponente natural:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{-2}$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3}:\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\right]^{0}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}:\left(\frac{2}{5}\right)^{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

c) $\left(2-\frac{1}{4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}$

f) $\left(\frac{6}{5}\right)^{8}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-5}:\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$

Las soluciones quedan:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{6}$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3}:\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\right]^{0}=\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$

c) $\left(2-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$

f) $\left(\frac{6}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^6$

5. ¿Qué tipo de decimal genera cada uno de los racionales siguientes?

a) $\frac{28}{126}$ **b)** $-\frac{36}{225}$ **c)** $\frac{73}{63}$ **d)** $\frac{42}{528}$ **e)** $\frac{2\,145}{2\,100}$

En cada caso queda:

a) $\frac{28}{126} = \frac{2}{9} = 0,\overset{\frown}{2}$: decimal periódico puro.

d) $\frac{42}{528} = \frac{7}{88} = 0,079\overline{54}$: decimal periódico mixto.

b) $-\frac{36}{225} = -\frac{4}{25} = 0,16$: decimal exacto.

e) $\frac{2\,145}{2\,100} = \frac{143}{140}$: decimal periódico mixto.

c) $\frac{73}{63} = 1,\overline{158730}$: decimal periódico puro.

6. Expresa cada decimal en forma de fracción, opera y convierte el resultado final en número decimal:

a) $3,\overset{\frown}{1} + 5,2\overset{\frown}{1} + 2,8$

c) $6,1\overset{\frown}{4} : 3,\overset{\frown}{4} \cdot 2,44$

b) $\left(5,\overset{\frown}{4} - 3,4\overset{\frown}{2}\right) \cdot 2,7$

d) $12,5 + 3,7\overset{\frown}{8} : 1,\overset{\frown}{4}$

Las soluciones son:

a) $3,\overset{\frown}{1} + 5,2\overset{\frown}{1} + 2,8 = \frac{28}{9} + \frac{469}{90} + \frac{14}{5} = 11,1\overset{\frown}{2}$

b) $\left(5,\overset{\frown}{4} - 3,4\overset{\frown}{2}\right) \cdot 2,7 = \left(\frac{49}{9} - \frac{154}{45}\right) \cdot \frac{27}{10} = 5,46$

c) $6{,}1\widehat{4} : 3{,}\widehat{4} \cdot 2{,}44 = \frac{553}{90} : \frac{31}{9} \cdot \frac{244}{100} = \frac{33733}{7750} = 4{,}35264516129$

d) $12{,}5 + 3{,}7\widehat{8} : 1{,}\widehat{4} = \frac{25}{2} + \frac{341}{90} : \frac{13}{9} = \frac{983}{65} = 15{,}123076923$

7. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a) 323,25 **b) 0,372151515…** **c) 0,021333…** **d) 37,34 334 3334 33334…**

La clasificación queda:

● Racionales: a); b) y c). ● Irracionales: d).

8. Una empresa reparte 15 000 € de beneficios anuales entre sus tres socias. La primera socia recibe los $\frac{3}{5}$ de los beneficios; la segunda socia, los $\frac{2}{3}$ de lo que queda y la tercera socia l resto. ¿Qué cantidad corresponde a cada socia?

La primera socia recibe 9000 €, la segunda 4000 € y la tercera 2000 €.

9. Un estudiante tarda en pasar un trabajo a ordenador 12 h, mientras que otro tarda 8 h en realizar el mismo trabajo. Si el primero trabaja durante 4 h y deja el resto del trabajo para el segundo, ¿cuánto tiempo tardará este en finalizarlo?

El primer estudiante hace $\frac{4}{12}$ del trabajo, luego queda por hacer $\frac{8}{12}$ del trabajo.

El segundo estudiante tarda $\frac{8}{12} : \frac{1}{8} = \frac{64}{12} = 5{,}\widehat{3}\ horas = 5\ h\ 20\ \text{min}$ en terminar el trabajo.

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\dfrac{1,4}{0,5}$	$\dfrac{23}{3}$	**- 4²**	$\sqrt[3]{-27}$	$\dfrac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece										

Las soluciones pueden verse en la tabla.

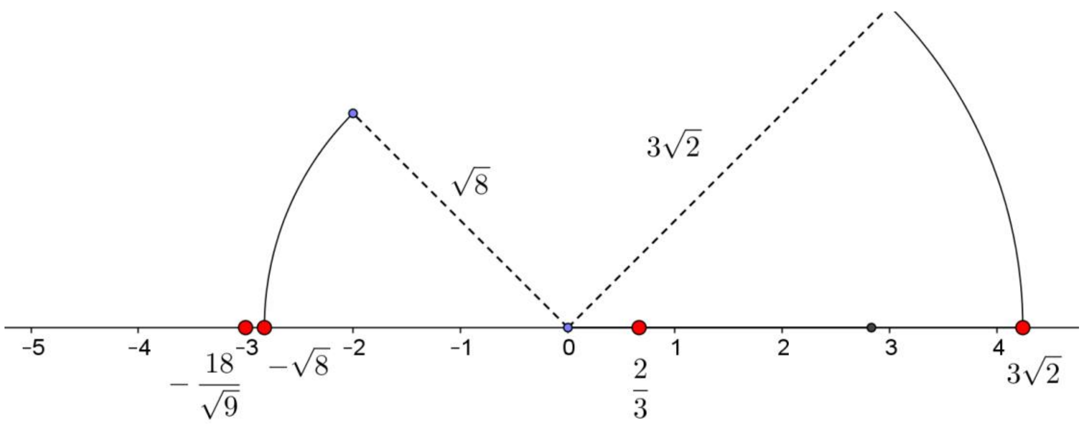
	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\dfrac{1,4}{0,5}$	$\dfrac{23}{3}$	**- 4²**	$\sqrt[3]{-27}$	$\dfrac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece	**Z**	**Q**	**N**	**R**	**Q**	**Q**	**Q**	**Z**	**Z**	**I**

ACTIVIDADES FINALES de la página 30

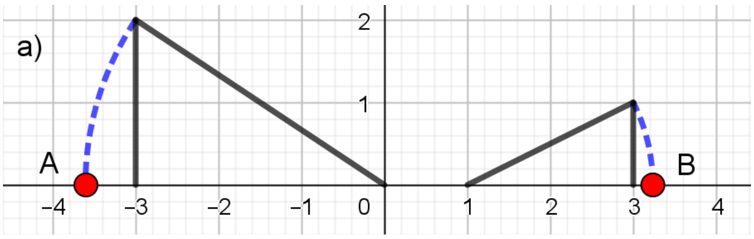
11. Representa en la recta real los siguientes números:

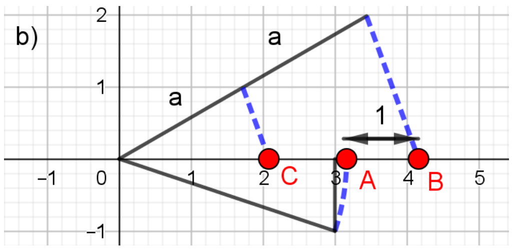
a) $3\sqrt{2}$ **b)** $-\sqrt{8}$ **c)** $-\dfrac{18}{\sqrt{9}}$ **d)** $0,\widehat{6}$

La representación de los números: a) $3\sqrt{2}$; b) $-\sqrt{8}$; c) $-\dfrac{18}{\sqrt{9}} = -3$ y d) $0,\widehat{6} = \dfrac{2}{3}$ puede verse en el diagrama de la imagen.



12. Teniendo en cuenta que a es un segmento cualquiera, ¿qué números representan, en cada construcción, los puntos A, B y C? Describe la construcción de cada uno de los puntos.





Los números representados son:

a) El punto A se corresponde con el número $-3-\sqrt{13}$. Es la suma del número – 3 con la longitud de la hipotenusa (tomada con valor negativo) de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 3.

El punto B se corresponde con el número $1+\sqrt{5}$. Es la suma de 1 con la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2.

b) El punto A está asociado con el número $\sqrt{10}$. Es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 3.

El punto B está asociado con el número $1+\sqrt{10}$. Es la suma del número 1 (distancia entre los puntos A y B) con la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 3.

El punto C está asociado con el número $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$. Su posición coincide con la mitad de la longitud del segmento OB, debido a la construcción con segmentos proporcionales.

13. Ordena de menor a mayor, los números reales: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $0,\overline{71}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{71}{100}$, $0,\overline{83}$ y $0,70\overline{5}$.

Para comparar varios números reales, se puede recurrir a las primeras cifras de su expresión decimal.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071...$ $0,\overline{71} = 0{,}7171...$ $\frac{5}{6} = 0{,}8333...$ $\frac{71}{100} = 0{,}71$ $0,\overline{83} = 0{,}8383...$ $0,70\overline{5} = 0{,}7055...$

Por tanto, la ordenación buscada es: $0,70\overline{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{71}{100} < 0,\overline{71} < \frac{5}{6} < 0,\overline{83}$.

14. Dibuja sobre la recta real los siguientes conjuntos

a) A = {a $\in$ R | a < - 2 y a > - 6}

d) $D = (-1, 4] \cap (0, 3)$

b) B = {b $\in$ R | b < 0 y b > - 7}

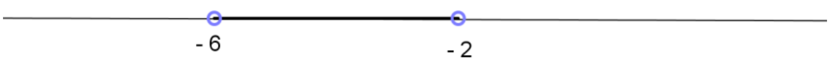
e) E (5, 2)

c) C = {c $\in$ Z | c > 2 o c > - 3}

f) $F = (-\infty, -5]$

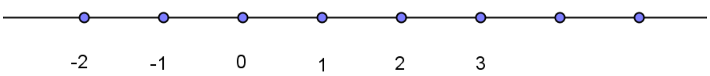
Los conjuntos resultantes aparecen a continuación y las representaciones pueden verse en el dibujo.

a) A = $\{a \in R \,/\, a < -2 \ y \ a > -6\}$ = (- 6, - 2)

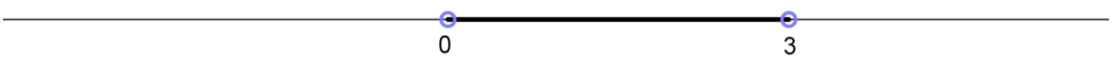


b) $B = \{b \in R \ \mathrm{I} \ b < 0 \ y \ b > -7\}$ = (- 7, 0)

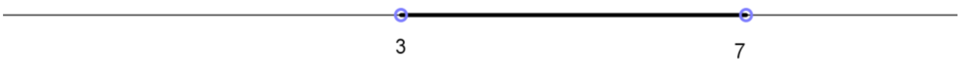
c) $C = \{c \in Z \ \mathrm{I} \ c > 2 \ ó \ c > -3\}$ = {- 4, - 3, - 2...}



d) $D = (-1, 4] \cap (0, 3)$ = (0, 3)

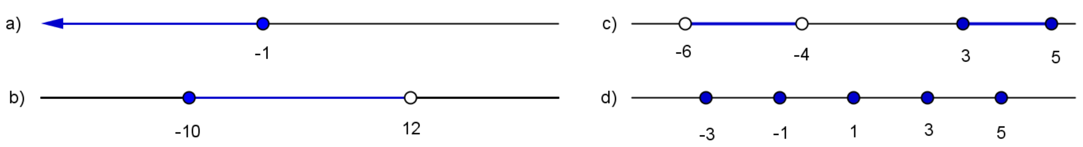


e) E (5, 2) = (3, 7)



f) $F = (-\infty, -5]$

15. Escribe cada uno de los siguientes conjuntos en forma simbólica y de intervalo cuando sea posible.,



Las soluciones son:

a) $(-\infty, -1)$ b) [- 10, 12) c) $(-6, -4) \cup [3, 5]$ d) {- 3, - 1, 1, 3, 5}

16. Encuentra, en cada caso, el intervalo donde se encuentra un número x que cumple:

a) x ≥ - 3 **b) 0 ≤ x + 2 ≤ 7** **c) – x > 2** **d) 1 < - x ≤ 4**

a) Todos los números reales mayores o iguales que 3 se encuentran en el intervalo $[-3, +\infty)$.

b) Restando 2 unidades a los tres miembros de la desigualdad $0 \leq x + 2 \leq 7$, obtenemos, $-2 \leq x \leq 5$. El intervalo buscado es $[-2, 5]$

c) Si se multiplica por – 1, se obtiene la desigualdad $x < -2$, que corresponde al intervalo $(-\infty, -2)$.

d) Si se multiplica por – 1, se obtiene $-1 > x \geq -4$, es decir, $-4 \leq x < -1$, que corresponde al intervalo $[-4, -1)$.

17. Dado el número 1 724,157203… indica cuáles de las aproximaciones decimales del número son redondeos. En los casos en que lo sean, anota la cota de error.

1 725	1 724,16	1 724,2	1 724,1	1 720	1 724,158	1 724,1572

Para cada uno de los números queda:

- 1 725 no es redondeo.
- 1 724,16 es un redondeo a centésimas. Cota de error 0,005.
- 1 724,2 es un redondeo a décimas. Cota de error 0,05.
- 1 724,1 no es un redondeo.
- 1 720 es un redondeo a decenas. Cota de error 5.
- 1 724,158 no es un redondeo.
- 1 724,1572 es un redondeo a diezmilésimas. Cota de error 0,00005.

18. Arquímedes llegó a determinar que el valor de π cumple $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al tomar cada una de las fracciones como valor aproximado de π.

Consideramos como valor real π = 3,141592.

Para la fracción $\frac{223}{71}$ obtenemos:

Error absoluto = $\left|3{,}141592 - \frac{223}{71}\right| = 0{,}000\ 746...$

Error relativo = $\frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} = \frac{0{,}000\ 746}{3{,}141592} = 0{,}000\ 237...$

Para la fracción $\frac{22}{7}$ obtenemos:

Error absoluto = $\left|3{,}141592 - \frac{22}{7}\right| = 0{,}001\ 265...$

Error relativo = $\frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} = \frac{0{,}001\ 265}{3{,}141592} = 0{,}000\ 4022...$

19. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al redondear el número de oro φ a centésimas.

Consideramos el número de oro Φ = 1,61803398…

El redondeo a las centésimas es 1,62. Los errores son:

Error absoluto = $\left|1{,}61803398 - 1{,}62\right| = 0{,}001\,97...$

Error relativo = $\frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} = \frac{0{,}00197}{1{,}61803398} = 0{,}001\,215\,06...$

20. Expresa en notación científica estas cantidades y determina el orden de magnitud:

a) Distancia Tierra-Luna: 384 000 km

c) Virus de la gripe: 0,000 000 002 2 m

b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km **d) Radio del protón: 0,000 000 000 05 m**

En la tabla aparecen los resultados:

Apartado	Notación decimal	Notación científica	Orden de magnitud
a)	384 000 km	$3,84 \cdot 10^{5}$ km	10^{5}
b)	150 000 000 km	$1,5 \cdot 10^{8}$ km	10^{8}
c)	0,000 000 002 2 m	$2,2 \cdot 10^{-9}$ m	10^{-9}
d)	0,000 000 000 05 m	$5 \cdot 10^{-11}$ m	10^{-10}

21. La capacidad de memoria de un ordenador se mide en:

byte = 2^{3} bits; k-byte = 2^{10} bytes; Megabyte = 2^{10} k-bytes; Gigabyte = 2^{10} Megabytes

Expresa, como potencia y en notación científica, la capacidad de los siguientes ordenadores y disquetes en bytes y bits:

a) Disco duro de 127 gigas **b) Disquete de 1,44 megas** **c) Un CD-ROM de 650 megas**

Los cálculos quedan:

a) 127×2^{30} Bytes = $1,36 \text{ X } 10^{11}$ Bytes 127×2^{33} Bits = $1,09 \times 10^{12}$ Bits.

b) $1,44 \times 2^{20}$ Bytes = $1,5 \text{ X } 10^{6}$ Bytes $1,44 \times 2^{23}$ Bits = $1,21 \times 10^{7}$ Bits.

c) 650×2^{20} Bytes = $6,8 \text{ X } 10^{8}$ Bytes 650×2^{23} Bits = $5,45 \times 10^{9}$ Bits.

ACTIVIDADES FINALES de la página 31

22. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2^9 \cdot 10^3 \cdot 12^{-2} \cdot 30^{-3}}{3^{-7} \cdot 5^{-3} \cdot 60^3}$ **b)** $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{4^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{-1}}$ **c)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 : \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$

Los resultados son:

a) $\dfrac{2^9 \cdot 10^3 \cdot 12^{-2} \cdot 30^{-3}}{3^{-7} \cdot 5^{-3} \cdot 60^3} = \ldots = \dfrac{1}{6}$ c) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 : \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}} = \ldots = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{23}{6}}$

b) $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{4^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{-1}} = \ldots = \dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{2}$

23. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{36a^4 b^2}$ **b)** $\sqrt[3]{-8x^6 y^3}$ **c)** $\sqrt[4]{256z^8}$

Las soluciones son:

a) $\sqrt{36a^4 b^2} = 6a^2 b$ b) $\sqrt[3]{-8x^6 y^3} = -2x^2 y$ c) $\sqrt[4]{256z^8} = 4z^2$

24. Expresa en forma de potencias las raíces, o en forma de raíz las potencias siguientes:

a) $\sqrt[4]{a}$ **b)** $3^{3/2}$ **c)** $\sqrt[5]{a^4}$ **d)** $7^{2/3}$ **e)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ **f)** $7^{-3/2}$ **g)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$ **h)** $5^{-2/3}$

Las potencias y raíces pedidas quedan:

a) $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ c) $\sqrt[5]{a^4} = a^{4/5}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-2/3}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = a^{-3/2}$

b) $3^{3/2} = \sqrt{3^3}$ d) $7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$ f) $7^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{7^3}}$ h) $5^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

25. Pon las siguientes expresiones bajo un único radical:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ **b)** $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3$ **c)** $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$ **d)** $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4$

Los radicales son:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{5^3}$

b) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3 b^6}$

d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4 = a^6 b$

26. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{500}$ **b)** $\sqrt[3]{a^3b^4}$ **c)** $\sqrt[4]{625x^5y^6}$ **d)** $\sqrt{x^2 + x^2y}$

Las expresiones quedan:

a) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

c) $\sqrt[4]{625x^5y^6} = 5xy\sqrt[4]{xy^2}$

b) $\sqrt[3]{a^3b^4} = ab\sqrt[3]{b}$

d) $\sqrt{x^2 + x^2y} = x\sqrt{1+y}$

27. Introduce los factores en el radical:

a) $5\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt[4]{3^3}$ **e)** $2\sqrt[3]{2a}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2}$ **d)** $a^4b^2\sqrt{2a^3b}$ **f)** $4ab\sqrt[3]{2a^2b}$

Los radicales quedan:

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$

d) $a^4b^2\sqrt{2a^3b} = \sqrt{2a^{11}b^5}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{27a^5b^3}$

e) $2\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{16a}$

c) $3\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^7}$

f) $4ab\sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[3]{128\,a^5b^4}$

28. Calcula y presenta el resultado en forma de raíz y en forma de potencia:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot a^2$ **c)** $\sqrt[4]{2a^5} : \sqrt[4]{2a^3}$ **d)** $\sqrt[5]{3^6} : \sqrt[5]{3^4}$

Las soluciones son:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2$

c) $\sqrt[4]{2a^5} : \sqrt[4]{2a^3} = \sqrt{a} = a^{1/2}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot a^2 = \sqrt[3]{a^7} = a^{7/3}$

d) $\sqrt[5]{3^6} : \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{3^2} = 3^{2/5}$

29. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250}$ **c)** $\frac{4}{5}\sqrt{8} - \sqrt{50} + \frac{7}{2}\sqrt{18} - \frac{3}{4}\sqrt{98}$

Los resultados de las operaciones son:

a) $3\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} = \frac{57}{10}\sqrt{2}$

c) $\frac{4}{5}\sqrt{8} - \sqrt{50} + \frac{7}{2}\sqrt{18} - \frac{3}{4}\sqrt{98} = \frac{37}{20}\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250} = -10\sqrt[3]{2}$

30. Reduce a índice común y ordena de menor a mayor las raíces de cada apartado:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[5]{5}$ **c)** $\sqrt[4]{4},\ \sqrt[6]{6}$ **e)** $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[9]{3},\ \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{10},\ \sqrt[5]{100}$ **d)** $\sqrt[4]{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{2}$ **f)** $\sqrt{3^{-1}},\ \sqrt[4]{5^{-3}}$

La solución queda:

a) $Como\ \sqrt[10]{5^2} < \sqrt[10]{2^5}\ entonces\ \sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$

b) $Como\ \sqrt[15]{10^5} < \sqrt[15]{10^6}\ entonces\ \sqrt[3]{10} < \sqrt[5]{100}$

c) $Como\ \sqrt[12]{6^2} < \sqrt[12]{4^3}\ entonces\ \sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{4}$

d) $Como\ \sqrt[12]{2^3} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^6}\ entonces\ \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$

e) $Como\ \sqrt[18]{3^2} < \sqrt[18]{2^6} < \sqrt[18]{5^9}\ entoces\ \sqrt[9]{3} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$

f) $Como\ \sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt[4]{3^{-2}}\ entonces\ \sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt{3^{-1}}$

31. Opera:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6}$ **b)** $\sqrt[6]{a^5} \cdot 5\sqrt{a^3} : \sqrt[10]{a}$ **c)** $\sqrt[8]{ab^3} \cdot \sqrt[6]{2a^2b^2}$ **d)** $\sqrt{2ab} : \sqrt[4]{8a^3b}$ **e)** $\sqrt{3\sqrt[3]{3^2}}$

Después de operar obtenemos:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^4}$

b) $\sqrt[6]{a^5} \cdot 5\sqrt{a^3} : \sqrt[10]{a} = 5a^2\sqrt[30]{a^7}$

c) $\sqrt[8]{ab^3} \cdot \sqrt[6]{2a^2b^2} = \sqrt[24]{2^4 \cdot a^{11} \cdot b^{17}}$

d) $\sqrt{2ab} : \sqrt[4]{8a^3b} = \sqrt[4]{\dfrac{b}{2a}}$

e) $\sqrt{3\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[6]{3^5}$

32. Realiza las siguientes operaciones y simplifica lo más posible los resultados:

a) $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ **d)** $\left(4\sqrt{18}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}\right)\cdot 2\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{7}+3\right)^2-4\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+3\right)$ **e)** $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}$

c) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)-\left(2+\sqrt{2}\right)^2$ **f)** $\left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right)$

Quedan:

a) $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{2}-2\sqrt{2}$ d) $\left(4\sqrt{18}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}\right)\cdot 2\sqrt{2}=64-8\sqrt{6}$

b) $\left(2\sqrt{7}+3\right)^2-4\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+3\right)=9$ e) $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=3\sqrt{6}-9+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

c) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)-\left(2+\sqrt{2}\right)^2=-4-4\sqrt{2}$ f) $\left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right)=30$

33. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ **d)** $\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$ **e)** $\frac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}$ **f)** $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$ **g)** $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ **h)** $\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}$

Después de racionalizar se obtiene:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$

d) $\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt[4]{3^3}}{2}$

e) $\frac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{7^3\cdot 3^4}}{3}$

f) $\frac{3}{2+\sqrt{2}}=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$

g) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3$

h) $\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}=3-\sqrt{7}$

34. Realiza las operaciones habiendo racionalizado previamente:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96}-\frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}$ **b)** $\frac{2\sqrt{18}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{2}{1+\sqrt{3}}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}$

La solución queda:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96}-\frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}=11\sqrt{3}$

c) $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{34+23\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{2\sqrt{18}-5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=-4$

d) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

ACTIVIDADES FINALES de la página 32

35. En un análisis de sangre de un paciente, el número de glóbulos rojos por mm^3 de sangre ha sido de $4{,}8\cdot 10^6$.

a) ¿Cuál es el número de glóbulos rojos de este paciente, sabiendo que su cuerpo contiene aproximadamente 5 litros de sangre?

b) Si el diámetro de cada glóbulo rojo es aproximadamente de 10^{-2} mm, ¿cuál es la longitud en kilómetros de una hilera formada por los glóbulos rojos de este paciente?

c) Si la longitud del Ecuador es aproximadamente de 40 000 km, ¿cuántas veces podría dar la vuelta a la Tierra esta hilera de glóbulos rojos?

Realiza los cálculos en notación científica.

a) Los 5 litros de sangre son 5 dm^3. Como cada dm^3 contiene 10^6 mm^3, entonces toda la sangre del paciente, en mm^3, será $5\cdot 10^6$ mm^3.

Si el número de glóbulos rojos por mm^3 de sangre ha sido de $4{,}8\cdot 10^6$; el número de glóbulos rojos del paciente serán:

$$(5\cdot 10^6)\cdot(4{,}8\cdot 10^6)=2{,}4\cdot 10^{13}.$$

b) Un kilómetro tiene 10^6 mm, por tanto, la longitud en kilómetros de todos los glóbulos rojos del paciente serán:

$$(2{,}4 \cdot 10^{13}) : (10^6) = 240\,000 \text{ km}$$

c) Si la longitud del Ecuador es aproximadamente de 40 000 km, el número de vueltas que da la hilera de glóbulos rojos alrededor de la Tierra será:

$$240\,000 : 40\,000 = 6.$$

36. La naranja pierde $\frac{1}{5}$ de su masa al pelarla y la naranja pelada pierde un 30% de su masa al exprimirla para hacer zumo. ¿Cuántos kilogramos de naranjas hemos de comprar para obtener 2 400 kg de zumo?

El zumo supone: $\frac{70}{100} \cdot \frac{4}{5} \cdot Peso = \frac{28}{50} \cdot P.$

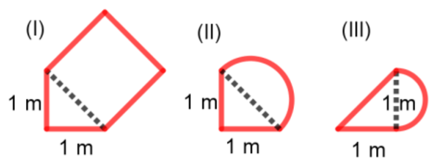
Por tanto: $\frac{28}{50} \cdot P = 2400,\ entonces\ P = 4285{,}7\ kg\ \ de\ naranjas$

37. La cantidad de azúcar morena que se obtiene de la caña es $\frac{12}{19}$ de su masa. La cantidad de azúcar blanca que se obtiene de refinar azúcar morena es $\frac{4}{3}$ de su masa. ¿Cuánta caña de azúcar se necesita para obtener diez toneladas de azúcar blanca?

La solución queda:

$$\begin{cases} Azúcar\ moreno (AM) = \frac{12}{19}\ caña\ (C) \\ Azúcar\ blanca\ (AB) = \frac{4}{3}\ (AM) \end{cases} \Rightarrow\ AB = \frac{12}{19} \cdot \frac{4}{3} \cdot C\ \Rightarrow\ 10\ T = \frac{12}{19} \cdot \frac{4}{3} \cdot C\ \Rightarrow\ C = 11{,}875\ T\ \ de\ caña.$$

38. Para cada una de las figuras, expresa el valor de su perímetro y su área utilizando números irracionales. Calcula cada uno de estos seis números, redondeados a la segunda cifra decimal.



Los valores pedidos pueden verse en la tabla.

Figura	Perímetro	Área
I	$2 + 3\sqrt{2} = 6{,}24$ u.	$5/2 = 2{,}50$ u^2

II	$2+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ = 4,22 u.	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=$ 2,07 u^2
III	$1+\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$ = 3,99 u.	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=$ 0,89 u^2

39. La masa de la Tierra es de 5,98 · 10^{24} kg, y la de Neptuno, 1,03 · 10^{26} kg.

a) ¿Cuál es la relación entre ambas masas?

b) Suponiendo que ambos cuerpos fueran esferas perfectas con radios de 6378 y 24750 km, respectivamente, calcula la densidad aproximada de cada uno de ellos.

a) La masa de Neptuno es $\frac{1{,}03\cdot 10^{26}}{5{,}98\cdot 10^{24}}=$ 17,224 veces la de la Tierra.

b) La densidad de la Tierra es $\frac{5{,}98\cdot 10^{27}}{1{,}09\cdot 10^{27}}=$ 5,49 g/cm^3.

La densidad de Neptuno es $\frac{1{,}03\cdot 10^{29}}{6{,}35\cdot 10^{28}}=$ 1,62 g/cm^3.

40. Efectúa y simplifica:

a) $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}$ **b)** $\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}$ **c)** $\left(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{16}\right)\cdot\sqrt[3]{4}$ **d)** $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5^5}}}}$

Queda:

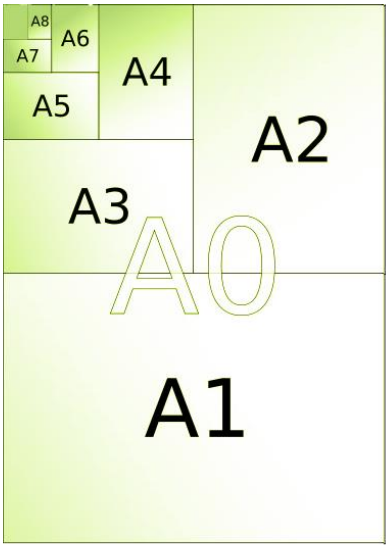
a) $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}=6$

c) $\left(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{16}\right)\cdot\sqrt[3]{4}=6$

b) $\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}} = 4$

d) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5^5}}}} = 5\sqrt[16]{5^3}$

41. La mayor parte del mundo usa los formatos de papel de la serie DIN. Uno de ellos corresponde a la serie A, que puedes ver en la imagen.



Estos formatos tienen la propiedad de que la relación entre sus lados es $\sqrt{2}$ y la superficie de cada uno de los formatos de esta serie es, aproximadamente, la mitad de la superficie del formato anterior, la superficie de A1 es la mitad de la de A0, la de A2 la mitad de A1 y así sucesivamente.

Halla los lados de los cuatro primeros formatos de esta serie A dando el resultado de dos formas: en forma radical y en forma de número decimal con aproximación a las milésimas.

Siendo x e y los lados del tamaño A0 podemos hallar estos valores mediante el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases}$$

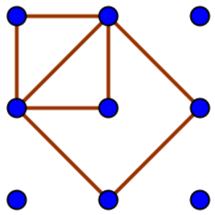
De la misma forma obtenemos el resto de valores para los demás formatos.

FORMATO	A0	A1	A2	A3	A4
TAMAÑO	$\sqrt[4]{2}\ x\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2^3}}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{2^3}}{4}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{4}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2^3}}{8}$
TAMAÑO (m)	1,189 x 0,841	0, 841 x 0,594	0, 594 x 0,420	0,420 x 0,297	0, 297 x 0, 210

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN de la página 33

Contando cuadrados

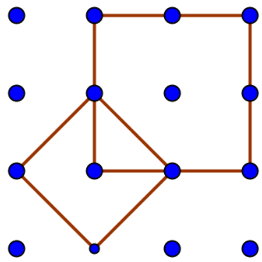
Vamos a contar cuadrados sobre cuadrículas de puntos.



a) ¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar de manera que tengan sus vértices sobre los puntos de la cuadrícula 3 x 3 del dibujo?

b) ¿Cuántos tipos diferentes de cuadrados se pueden dibujar sobre la citada cuadrícula?

c) ¿Cuántos cuadrados y de cuántos tipos diferentes se pueden dibujar sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos?



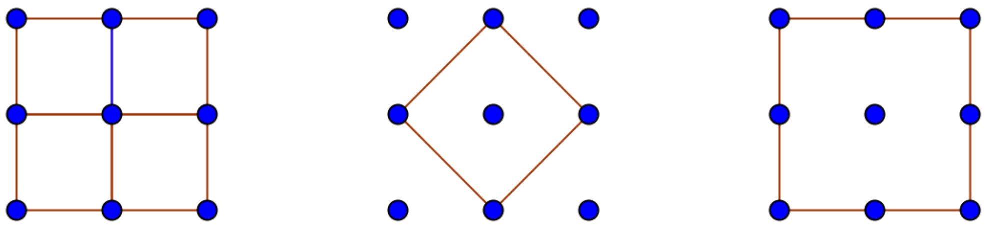
d) Intenta encontrar alguna regularidad repitiendo la situación anterior para las cuadrículas 5 x 5 y 6 x 6. Calcula cuántos cuadrados y de cuántos tipos podremos dibujar en una cuadrícula de 8 x 8 puntos.

e) ¿Cuántos cuadrados se podrían dibujar sobre una cuadrícula de dimensión n x n?

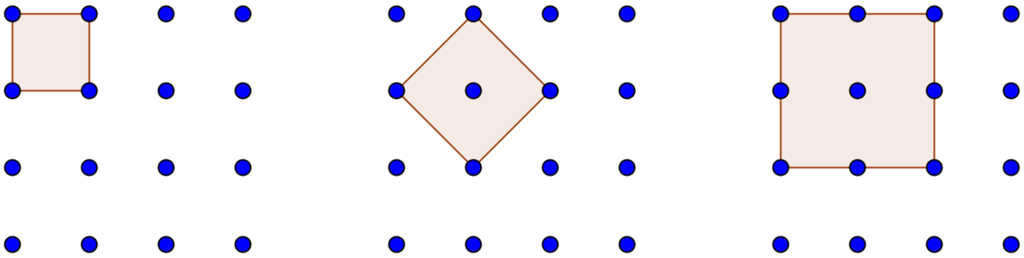
Nos gustaría investigar cuántos triángulos y de cuántos tipos que se pueden trazar sobre las mismas cuadrículas. Te atreverías a contar segmentos, rectángulos…

Y si las cuadrículas son de dimensiones m x n, ¿cuántos cuadrados, triángulos, segmentos, rectángulos… se pueden dibujar?

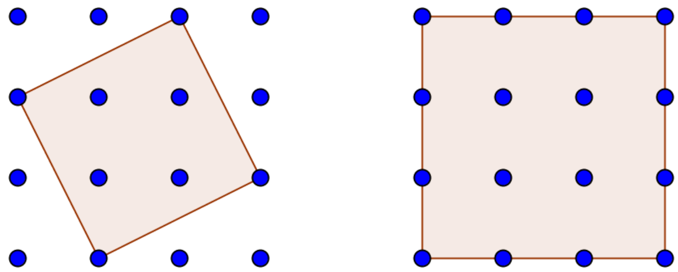
a) y b) En una cuadrícula de 3 x 3 puntos se pueden dibujar 6 cuadrados de 3 tamaños diferentes.



c) Sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos se pueden dibujar 20 cuadrados de 5 tamaños diferentes.



9 4 4



2 1

d) En una cuadrícula de 8 x 8 puntos se pueden dibujar cuadrados de 13 tamaños diferentes y podremos encontrar:

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 1^2 = 336 \text{ cuadrados.}$$

e) Sobre una cuadrícula de n x n puntos se pueden dibujar cuadrados de 2n - 3 tamaños diferentes y el siguiente número de cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i \cdot (n-i)^2 = 1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \ldots + (n-1) \cdot 1^2 = \frac{n^4 - n^2}{12}$$